# 2022—2023学年春夏学期线性代数期末模拟考 (甲)

**命题组织: 丹青学业指导中心**

欢迎大家模考由丹青学园学业指导中心举办的线性代数模拟期中考, 符号说明:(1)$E_n$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 当下标省略时, 表示使得运算有意义的阶数的单位矩阵;

(10 分) **一**、计算下列行列式, 其中当 $i \neq j, i, j = 1,2,3,4$ 时 $\theta_i \neq \theta_j$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & \cos\theta_4 \\ \cos 2\theta_1 & \cos 2\theta_2 & \cos 2\theta_3 & \cos 2\theta_4 \\ \cos 3\theta_1 & \cos 3\theta_2 & \cos 3\theta_3 & \cos 3\theta_4 \end{vmatrix}.$$

(15 分) **二**、设 $A = (a_{ij})$ 为 $n$ 阶可逆矩阵, $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 在 $A$ 的行列式中的代数余子式, 求齐次线性方程组 $BX = O$ 的解空间和解空间的一组基, 其中 $B = (a_{ij})_{r\times n}, r < n$.

(10 分) **三**、求下列 $n$ 矩阵的逆矩阵 ($n \geq 2$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(20 分) **四**、已知齐次线性方程组 (1) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

齐次线性方程组 (2) 的一个基础解系是 $\alpha_1 (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$. 解答下列问题

1. 求方程组 (1) 的基础解系;
2. $a$ 取何值时, 方程组 (1) 和 (2) 有非零公共解?

(20 分) **五**、已知 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵, 解答下列问题.

1. 若 $n = 3$ 且 $r(A) = 2, \alpha_1 = (0,1,0)^T, \alpha_2 = (-1,0,1)^T$ 是 $A$ 对应特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 的特征向量, 求 $A$ 的另一特征值和对应的特征向量, 并求 $A, A^n$;
2. 若 $\alpha_1, \alpha_2$ 为 $n$ 维列向量, 且 $\alpha_1^T A\alpha_1 > 0, \alpha_2^T A\alpha_2 < 0$, 证明 $\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关, 且存在非零向量 $\alpha \in W = \mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2)$, 使得 $\alpha^T A\alpha = 0$.

(15 分) **六**、设 $A, B$ 分别是 $R$ 上的 $s \times n, n \times s$ 矩阵, 证明 $r(A - ABA) + n = r(A) + r(E_n - BA)$.

(10 分) **七**、设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

将 $A$ 分解成一个正交矩阵 $T$ 和主对角元素都为正数的上三角矩阵 $B$ 的乘积, 即 $A = TB$.