

2022—2023学年春夏学期线性代数期末模拟考(乙)

命题组织: 丹青学业指导中心

欢迎大家模考由丹青学园学业指导中心举办的线性代数模拟期中考, 符号说明:(1) E_n 为 n 阶单位矩阵, 当下标省略时, 表示使得运算有意义的阶数的单位矩阵;

(10分) 一、计算下列行列式, 其中当 $i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4$ 时 $\theta_i \neq \theta_j$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 & \cos \theta_4 \\ \cos 2\theta_1 & \cos 2\theta_2 & \cos 2\theta_3 & \cos 2\theta_4 \\ \cos 3\theta_1 & \cos 3\theta_2 & \cos 3\theta_3 & \cos 3\theta_4 \end{vmatrix}.$$

(15分) 二、设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶可逆矩阵, A_{ij} 为 a_{ij} 在 A 的行列式中的代数余子式, 求齐次线性方程组 $BX = O$ 的基础解系, 其中 $B = (a_{ij})_{r \times n}, r < n$.

(10分) 三、求下列 n 矩阵的逆矩阵 ($n \geq 2$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(20分) 四、已知齐次线性方程组 (1) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

齐次线性方程组 (2) 的一个基础解系是 $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$. 解答下列问题

1. 求方程组 (1) 的基础解系;
2. a 取何值时, 方程组 (1) 和 (2) 有非零公共解?

(20分) 五、已知 A 为 n 阶实对称矩阵, 解答下列问题.

1. 若 $n = 3$ 且 $r(A) = 2, \alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$ 是 A 对应特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 的特征向量, 求 A 的另一特征值和对应的特征向量, 并求 A, A^n ;
2. 若 α_1, α_2 为 n 维列向量, 且 $\alpha_1^T A \alpha_1 > 0, \alpha_2^T A \alpha_2 < 0$, 证明 α_1, α_2 线性无关.

(15分) 六、设 A, B 分别是 R 上的 $s \times n, n \times s$ 矩阵, 证明 $r(A - ABA) + n = r(A) + r(E_n - BA)$.

(10分) 七、设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

将 A 分解成一个正交矩阵 T 和主对角元素都为正数的上三角矩阵 B 的乘积, 即 $A = TB$.