2022—2023 学年春夏学期微积分期末模拟考

命题组织:丹青学园学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考，考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音;
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角;
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场;
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终止时间一到，应立即停止答题，离开考场;
5. 遵守考场纪律

1. 已知$R > 0$，求球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$与柱面$x^2 + y^2 = Rx$所围成的立体体积。(8)

2. 求星形铁丝L：$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$的质量，已知铁丝密度为$\rho(x，y) = |y|^{\frac{1}{3}}$。(8)

3. 求密度为$\rho(x，y) = z$的抛物面壳$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，$0 \leq z \leq 1$的质量。(10)

4. 求第二型曲面积分 $$\iint_S \frac{x\,dy\,dz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

   其中S：$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$，方向取外侧。(10)

5. 求由方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$所确定的隐函数$z=z(x，y)$的极值。(8)

6. 已知

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2} & 0\le x\le 1\\ 0 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$b_n=\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n x}{2}$$

求$S\left(\frac{1}{2}\right)$与$S(0)$。(8)

7. 求球面$x^2+y^2+z^2=6$与平面$x+y+z=0$交线在$(1，-2，1)$处的切线方程与法平面方程。(10)

8. 已知

$$f(x，y)=\begin{cases} x-y+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

（1） 证明$f(x，y)$在原点连续。(2)

（2） 求$f(x，y)$在原点的方向导数。(4)

（3） 判断$f(x，y)$在原点的可微性。(4)

9. 已知u，v可微，证明：

$$\frac{\partial(uv)}{\partial\vec{n}}=u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}+v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$与$\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}$为$u(x，y，z)$，$v(x，y，z)$在曲面$F(x，y，z)=0$上点$(x，y，z)$沿着其法线方向$\vec{n}$的方向导数。(8)

10. 设$\vec{F}(x，y)=P(x，y)\vec{i}+Q(x，y)\vec{j}$在开区域$D$内连续可微，在$D$内任何一圆周$C$上有

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds=0$$

其中$\vec{n}$是圆周C单位外法线向量，证明在D内恒成立$\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$。(8)

11. 证明级数

$$1+（-1）\hat{}n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

收敛(4)，并验证其值为$\frac{1}{\sqrt{2}}$。(2)

12. 若$f(x,\ y,\ z)$，$g(x,\ y,\ z)$和$h(x,\ y,\ z)$为三维空间中三次可微函数，V为由光滑封闭曲面S围成的部分。$\vec{A}=rot(f\cdot grad\ g)$，$\vec{n}$为$S$的单位外法向量。证

明：$\oint\!\!\!\!\iint_S \hbar\vec{A}\,d\vec{S} = \iiint grad\,\hbar \cdot \vec{A}dV$。(6)