

# 2021-2022 学年秋冬学期线性代数期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期末考试须知：

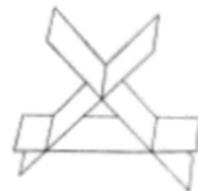
欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考，下面是考试须知。

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了时间一到，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、(1) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  与  $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$  相似，求  $x, y$ .

(2) 若二次曲面的方程  $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$  经正交替换化为  $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$ ，求  $a$  的值以及这个正交变换。

二、设  $\mathbb{R}^3$  中三张平面  $P_i : a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i$  两两相交，三条交线两两平行，如图所示。若三张平面的方程组成线性方程组  $AX = b$ ，求  $r(A), r(\bar{A})$ 。



三、设  $H$  为一个  $n$  阶实矩阵，若存在一个实对称正定矩阵  $P$ ，使得  $B = P - H^T P H$  为正定，证明， $H$  所有特征值的模长均小于 1。

四、设  $W$  是  $n$  维向量空间  $\mathbb{R}^n$  的一个真子空间，证明，必存在一个线性方程组  $AX = 0$ ，其解空间恰为  $W$ 。  
(Hint: 可以用满足某种性质的一系列行向量组成  $A$ )

五、(QR 分解) (1) 设  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  为单位向量, 令  $H = E - 2\alpha\alpha^T$ , 求证  $H$  是对称的正交矩阵. 注意到  $H\alpha = -\alpha$ , 因此称矩阵  $H$  为镜面反射矩阵.

(2) 记  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ , 对于任意的  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 试求一个  $\alpha$ , 使得对于某个正实数  $\lambda$ , 由  $\alpha$  构造的镜面反射矩阵  $H$  恰使  $Hx = \lambda e_1$ .

(3) 对于  $n$  阶可逆实矩阵  $A$ , 试求一个正交矩阵  $Q$  以及上三角矩阵  $R$ , 其中  $R$  的主对角线上全为正实数, 使得  $A = QR$  成立.

(4) 证明, 满秩正交且主对角线元素全为正的上三角矩阵只能是单位矩阵, 并由此证明 (3) 中分解  $A = QR$  的唯一性.

六、对任意  $n$  阶矩阵  $A$ , 试证明:  $r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \dots$

七、(SVD 奇异值分解) 设  $m \times n$  阶实矩阵  $A$  非零, 证明, 总存在  $m$  阶正交阵  $U$  以及  $n$  阶正交阵  $V$ , 使得  $A = U\Sigma V^T$ , 其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{r \times r} & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

$\Sigma_{r \times r} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  称为  $A$  的奇异值. (Hint: 研究实对称矩阵  $A^T A$ )



up主 丹青学指



学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

演草纸:

答题卡:

答题卡:

答题卡: