2020-2021 学年秋冬学期高等数学期末模拟考试答案

命题、组织：丹青学业指导中心

一、选择题

(1)B　$A\bar{B}\bar{C}$ 表示 A 发生，B 和 C 不发生

(2)D　$\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$　$\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$$

(3)B　令 $t = x-1 \therefore f(t) = (4+a)t + 8 + a + b + \dfrac{7}{t} \therefore 4+a = 0, 8+a+b = 0$

(4)B　$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(5)D　$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ 上成立

(6)D　$|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导，理由同 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导

(7)B

(8)A

(9)C

(10)B

二、填空题

(1)0.4　根据抓阄的性质或者等于 $\dfrac{C_8^1 A_{19}^{19}}{A_{20}^{20}} = \dfrac{8}{20} = 0.4$

(2)1

(3)$(-1)^{n+1}n!$

(4)$\dfrac{\pi}{2}$　依定积分定义，原式 $= \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \dfrac{\pi}{2}$

(5)$\csc x$　$y' = \dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sec^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$

三、解答题

1、$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x)}{6x} = -\frac{1}{6}$

2、$\int \frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx=\int \frac{-d\cos x}{1+\cos^2 x}+\int \frac{-d\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=-\arctan(\cos x)-\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C$

3、$f'(x)=a\cos x+\frac{2}{3}\cos 2x$, 令 $f'(x)=0$, 则 $a\cos x+\frac{2}{3}\cos 2x=0$ ，即 $a=-\frac{2}{3}\cos 2x/\cos x \because x=\frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 取得极值。$\therefore a=-\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}\pi/\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}$, $f''(x)=-a\sin x-\frac{4}{3}\sin 2x=-\frac{2}{3}\sin x-\frac{4}{3}\sin 2x$, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{4}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}<0 \therefore f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极大值，其值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4、$|A|=-(k+1)(k-4)$ 当 $|A|\neq 0$ 时, 即 $k\neq -1$ 且 $k\neq 4$, 有唯一解. $k=-1$ 时，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ 无解.$k=4$ 时，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则特解为 $(0,4,0)^T$; 齐次通解：$k(-3,-1,1)^T$，非齐次通解为：$x=(0,4,0)^T+k(-3,-1,1)^T$

5、(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2A\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=2A$, $\therefore A=\frac{1}{2}$

(2) $P(0<X<1)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=0$

$D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=2\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx=\Gamma(3)=2!=2$

6、(1) 根据题意, 先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，切线方程:

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

由于切线过原点，解出 $x_0=e$, 从而切线方程为: $y=\frac{1}{e}x$, 则平面图形面积

$$=\int_0^1 (e^y-ey)\,dy=\frac{1}{2}e-1$$

(2) 三角形绕直线 $x=e$ 一周所得圆锥体体积记为 V_1, 则 $V_1=\frac{1}{3}\pi e^2$ 为 V_2

$$V_2=\int_0^1 \pi\left(e-e^y\right)^2 dy$$

D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}\left(5e^2-12e+3\right)$

7、令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, t\in[0,\pi]$$

那么由条件有 $F(0)=F(\pi)=0$. 进一步利用分部积分得

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\cos x \ \mathrm{d}x &= \int_0^\pi \cos x \ \mathrm{d}[F(x)] \\
&= \left.F(x)\cos x\right|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi F(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= F(\xi)\sin\xi = 0
\end{aligned}$$

倒数第二步我们用到了积分中值定理, 其中 $\xi\in(0,\pi)$, 于是 $\sin\xi\neq 0, F(\xi)=0$. 那么由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$, 使得

$$F'\left(\xi_1\right)=F'\left(\xi_2\right)=0$$

即 $f\left(\xi_1\right)=f\left(\xi_2\right)=0$