2021-2022 学年秋冬学期线性代数期末模拟考试答案

一、(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y.

(2) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交替换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，求 a 的值以及这个正交变换.

解. (1) 实对称矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\lambda^3-(x+2)\lambda^2+(2x-23)\lambda+(15x+40)$, 其所有特征值为 5，-4，$y$. 令 $|\lambda E-A|=0$，由 Vieta 定理以及题目，可知 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x+2\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=-(15x+40)\end{cases}$. 求解以上方程组可得 $x=4,y=5$.

(2) 记 $X=(x,y,z)^T, A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则二次曲面的方程可以表示为二次型 $X^TAX=4$. 由于它可以经正交替换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，可知 A 的特征值分别为 0，1，4. 令 A 的特征多项式为 0，立刻解得 $a=1$. 设正交替换为矩阵 U，新的变量为 $Y=(x_1,y_1,z_1)^T$，即 $X=UY$. 于是问题变为求正交矩阵 U，使得 $UAU^T=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$.

由于依次可以解得 A 的属于特征值 0,1,4 的特征向量分别为

$$u_1=\left(\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2}\right)^T, u_2=\left(\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)^T, u_3=\left(\frac{\sqrt6}{6},\frac{2\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{6}\right).$$

于是 $U^T=(u_1,u_2,u_3)$ 即为所求的正交变换，即

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt2}{2}x_1 & +0\cdot y_1-\frac{\sqrt2}{2}z_1\\ y=\frac{\sqrt3}{3}x_1 & -\frac{\sqrt3}{3}y_1+\frac{\sqrt3}{3}z_1\\ z=\frac{\sqrt6}{6}x_1 & +\frac{2\sqrt6}{6}y_1+\frac{\sqrt6}{6}z_1\end{cases}$$

□

二、设 $\mathbb{R}^3$ 中三张平面 $P_i: a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i$ 两两相交，三条交线两两平行，如图所示. 若三张平面的方程组成线性方程组 $AX=b$，求 $r(A), r(\overline{A})$.

解. 由题意，可知 $AX=b$ 为矛盾方程组，故 $r(\overline{A})=r(A)+1$. 又若任意消去方程组中的一行，余下的方程组解空间维数为 1. 即消去一行之后，方程组系数矩阵的秩为 2. 因此 $r(A)\geq 2$. 又考虑到 $r(A)<3$，否则 $AX=b$ 将有唯一解，因此解得 $r(A)=2, r(\overline{A})=3$. □

三、设 H 为一个 n 阶实矩阵，若存在一个实对称正定矩阵 P，使得 $B=P-H^TPH$ 为正定，证明，H 所有特征值的模长均小于 1.

证明. 任取 H 的一个特征值 λ. 取属于 λ 的特征向量 ξ，作

$$\begin{aligned}\xi^TB\xi &= \xi^TP\xi-(H\xi)^TP(H\xi)\\ &= \xi^TP\xi-\lambda^2\xi^TP\xi\\ &= (1-\lambda^2)\xi^TP\xi\end{aligned}$$

由 B 的正定性，知上式为恒正. 再由 P 的正定性，知一定有 $1-\lambda^2>0$，故 $|\lambda|<1$. □

四、设 W 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个真子空间，证明，必存在一个线性方程组 $AX=0$，其解空间恰为 W. (Hint: 可以用满足某种性质的一系列行向量组成 A)

证明. 设 $dim(W)=n-r$, 取 W 中的一组正交基 $x_1,x_2,...,x_{n-r}$(都取列向量)，并扩充为 $\mathbb{R}^n$ 上的一组正交基 $x_1,x_2,...,x_{n-r},...,x_n$. 对于一个齐次线性方程组 $AX=b$，只要其行空间恰为 $\mathrm{Span}\{x_{n-r+1},...,x_n\}$，则其解空间就一定为 W. 特别的，可以取

$$A=\begin{pmatrix} {x_{n-r+1}}^T \\ {x_{n-r+2}}^T \\ \vdots \\ {x_n}^T \end{pmatrix}$$

□

五、(QR 分解) (1) 设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 为单位向量，令 $H = E - 2\alpha\alpha^T$，求证 H 是对称的正交矩阵. 注意到 $H\alpha = -\alpha$，因此称矩阵 H 为**镜面反射矩阵**.

(2) 记 $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)^T$，对于任意的 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$，试求一个 α，使得对于某个正实数 λ, 由 α 构造的镜面反射矩阵 H 恰使 $Hx = \lambda e_1$.

(3) 对于 n 阶可逆实矩阵 A，试求一个正交矩阵 Q 以及上三角矩阵 R，其中 R 的主对角线上全为正实数，使得 $A = QR$ 成立.

(4) 证明，满秩正交且主对角线元素全为正的上三角矩阵只能是单位矩阵，并由此证明 (3) 中分解 $A = QR$ 的唯一性.

证明. (1)H 为对称是容易验证的.H 的正交性只要观察 $H^2 = (E - 2\alpha\alpha^T)^2 = E - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = E$ 立刻得到.

(2) 记 $\lambda = \sqrt{|x|^2}$，则 x 与 λe_1 的长度相同. 观察到 H 在向量空间中的作用将 α 变为 $-\alpha$，而对所有与 α 正交的向量 y，简单演算即知 $Hy = y$. 即 α 是镜面反射 H 的反射面的单位法向量. 现将 x 作正交分解 $x = k_1\alpha + k_2 y$，则 $\lambda e_1 = -k_1\alpha + k_2 y$. 于是 $x - \lambda e_1$ 恰是 α 的倍数. 如果 $k_2 = 0$，此时只需选取 α 为与 e_1 正交的单位向量即可，其他情况下

$$\alpha = \frac{x - \lambda e_1}{\sqrt{|x - \lambda e_1|^2}},$$

其中 $\lambda = \sqrt{|x|^2}$.

(3) 将 A 按列分块为 $A = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n)$. 采用数学归纳法. 对于 a_1，存在一个镜面反射矩阵 H_1，使得 $H_1 a_1 = \sqrt{|a_1|^2}\, e_1$，于是 $H_1 A = (\lambda_1 e_1\, H_1 a_2\, \cdots\, H_1 a_n)$. 假设已经用 k 个镜面反射变换，将前 k 列化为了上三角矩阵. 记此时的矩阵为 $A^{(k)} = \begin{pmatrix} R_k & * \\ O & A_k \end{pmatrix}$. 对 A_k 仍然作将第一列化为 e_1 的方法，则有一个 $n-k$ 阶镜面反射矩阵 H，使 HA_k 的第一列与 e_1 共线. 记 $H_{k+1} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & H \end{pmatrix}$, 则 H_{k+1} 就是将 $A^{(k)}$ 的第 $k+1$ 列化为上三角形状的正交阵 (事实上也是镜面反射矩阵). 记 $A^{(k+1)} = H_{k+1} A^{(k)}$，以此类推，最终可以将 A 化为一个主对角线元素非零的上三角阵 R，相应的有 $H_n H_{n-1} \cdots H_1 A = R$. 记 $H_1 H_2 \cdots H_n = Q$，则 $A = QR$.

(4) 设 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 为正交的上三角矩阵. 由第一列的模长为 1，知 $r_{11} = 1$. 由第二列与第一列正交以及其模长为 1，知 $r_{12} = 0, r_{22} = 1$, 以此类推，由第 k 列与前 $k-1$ 列正交以及其模长为 1，知 $r_{1k} = \cdots = r_{k-1,k} = 0, r_{kk} = 1$. 最终得到 R 的严格上三角部分全为 0，主对角线全为 1. 这正是单位矩阵. 下面由此证明 (3) 中分解的唯一性.

设 A 有两个 QR 分解 $A = Q_1 R_1, A = Q_2 R_2$. 则 $Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. 等式左端是正交阵，右端是满秩的主对角线元素全为正的上三角矩阵，因此右端为单位阵，于是 $Q_1 = Q_2$, 进而 $R_1 = R_2$,A 的 QR 分解唯一. □

六、对任意 n 阶矩阵 A，试证明：$r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$

证明. $n\ge r(A)\ge r(A^2)\ge\cdots\ge r(A^n)\ge r(A^{n+1})$ 是容易发现的. 注意到这个不等式链中的每一个值都只能取 $[0,n]$ 之间的整数. 因此一定存在一个正整数 $k\le n$, 使得 $r(A^k)=r(A^{k+1})$. 又由于 $A^kX=0$ 的解空间包含在 $A^{k+1}X=0$ 内，因此这两个方程组拥有完全相同的解空间. 因此这两个方程限制在 $A,A^2,...$ 的列空间 (实际上就是函数 $f_1(X)=AX,f_2(X)=A^2X,...,f_k(X)=A^kX,...$ 的值域) 上的解空间也应是完全相同的. 这说明 $r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots$. 又由于 $k\le n$，于是命题得证. □

七、(SVD 奇异值分解) 设 $m\times n$ 阶实矩阵 A 非零，证明，总存在 m 阶正交阵 U 以及 n 阶正交阵 V，使得 $A=U\Sigma V^T$，其中

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{r\times r} & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},$$

$\Sigma_{r\times r}=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_r\}$,$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r>0$. $\sigma_1,...,\sigma_r$ 称为 A 的奇异值. (Hint: 研究实对称矩阵 A^TA 的特征值)

证明. 考虑 n 阶实对称矩阵 A^TA. 存在正交矩阵 V，使得 $A^TA=V\Lambda V^T$，其中 $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$. 由于 A^TA 的实对称性，所有特征值均为实数. 又考虑到对任意的特征值 λ_i，取属于它的特征向量 ξ，则

$$0\le(A\xi,A\xi)=\xi^TA^TA\xi=\lambda_i(\xi,\xi).$$

注意到 $(\xi,\xi)\ge 0$，因此 $\lambda_i\ge 0$. 据此，可以假设 Λ 中所有特征值按从大到小顺序排列，且 $\lambda_n\ge 0$. 现记 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$, 将 U,V 按列展开为 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_m),V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$. 由 $AV=U\Sigma$，可得

$$(Av_1,Av_2,\cdots,Av_n)=(\sigma_1u_1,\sigma_2u_2,\cdots,\sigma_ru_r,0,\cdots,0).$$

于是对前 r 个非零奇异值，可唯一求得 U 的前 r 列为 $u_i=Av_i/\sigma_i$..

然后观察等式 $U^TA=\Sigma V^T$，仍然将 U,V 按列分块，类似前述的操作，可以得到 $A^Tu_{r+1}=A^Tu_{r+2}=\cdots=A^Tu_m=0$. 因此 $u_{r+1},...,u_m$ 可以取为方程 $A^TX=0$ 解空间的一组标准正交基.

下面只需要再验证 U 确实是正交的，为此只需证明 $u_1,u_2,...,u_r$ 为标准正交组，以及此向量组与 $u_{r+1},...,u_m$ 正交. 先证 $u_1,u_2,...,u_r$ 为标准正交组：注意到 $u_i^Tu_j=v_i^TA^TAv_j/\sigma_i\sigma_j=\lambda_jv_i^Tv_j/\sigma_i\sigma_j$. 若 $i\ne j$，则 v_i 与 v_j 正交，此式为 0；若 $i=j$，则此式等于 $\lambda_iv_i^Tv_i/\sigma_i^2=1$. 因此 $u_1,u_2,...,u_r$ 为标准正交组. 再证此向量组与 $u_{r+1},...,u_m$ 正交. 任取 $i=1,2,...,r$ 以及 $j=r+1,r+2,...,m$，可得 $u_i^Tu_j=v_i^TA^Tu_j/\sigma_i=0$. 因此 $u_1,u_2,...,u_r$ 与 $u_{r+1},...,u_m$ 正交. 从而这就证明了 U 的正交性，命题得证，如上所述的 $A=U\Sigma V^T$ 即为所求. □