

# 2021-2022 学年秋冬学期微积分期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期中考试考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考试。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

## 一、计算题

1. 设单调递增正数列  $\{x_n\}$  的极限为 2022, 求极限:  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n}.$$
2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2})\cos x^2}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}.$
3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x}.$
4. 计算  $\int_{-1}^1 (x^3 + \sqrt{1-x^2}) dx.$
5. (甲) 证明  $\int_1^{+\infty} (\arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}) dx$  的收敛性, 并求其值.  
(乙) 设  $m, n$  为自然数, 求  $I_m = \int_0^1 t^n (\ln t)^m dt.$

## 二、证明题

6. (甲) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内有二阶导数, 试证存在  $c \in (a, b)$ , 使

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(c).$$

(乙) 若  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$  ( $a_0 \neq 0$ ) 为实系数多项式, 且其一切根皆为实数, 试证: 导数  $P'_n(x)$ ,  $P''_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$  也仅有实根.

7. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有二阶导数. 试证:  $\exists c \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} f''(c)(b-a)^3.$$

8. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 试证:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$



up主 丹青学指



学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后  
可把试卷带出考场。试卷 分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和  
B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

演草纸:

答题卡:

答题卡:

答题卡: