

2020-2021 学年秋冬学期高等数学期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

欢迎大家参加期末模拟考，下面是考试须知：

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、选择题 (10*3'=30')

1. 设 A, B, C 为三个事件，用 A, B, C 的运算关系表示“三个事件恰好一个发生”为

- (A) $A \cup B \cup C$ (B) $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
(C) $\Omega - ABC$ (D) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

2. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ，则 $f(x)$ 的一个原函数为

- (A) $\arcsin x$ (B) $\arctan x$
(C) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ (D) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

3. 设 $f(x) = \frac{4x^2+3}{x-1} + ax + b$ ，若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ，则 a, b 的值，用数组 (a, b) 可表示为

- (A) $(4, -4)$ (B) $(-4, -4)$
(C) $(4, 4)$ (D) $(-4, 4)$

4. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 下面结论正确的是
- (A) 若 A, B 均可逆, 则 $A + B$ 可逆 (B) 若 A, B 均可逆, 则 AB 可逆
 (C) 若 $A + B$ 可逆, 则 $A - B$ 可逆 (D) 若 $A + B$ 可逆, 则 A, B 均可逆
5. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$ 的值为
- (A) 0 (B) -2
 (C) 1 (D) 2
6. 设 $f(x) = \cos x(x + |\sin x|)$, 则在 $x = 0$ 处有
- (A) $f'(0) = 2$ (B) $f'(0) = 1$
 (C) $f'(0) = 0$ (D) $f(x)$ 不可导
7. 下列无穷积分收敛的是
- (A) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ (B) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$
 (C) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ (D) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
8. 在区间 (a, b) 内若函数 $y = f(x)$ 恒满足 $f'(x) < 0$ 和 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 是
- (A) 单调下降且是凹的 (B) 单调上升且是凹的
 (C) 单调上升且是凸的 (D) 单调下降且是凸的
9. 满足方程 $f'(x) = 0$ 的 x 是函数 $y = f(x)$ 的
- (A) 极大值点 (B) 极小值点
 (C) 驻点 (D) 间断点
10. 下列变化过程中, () 为无穷小量
- (A) $\frac{\sin x}{x} (x \rightarrow 0)$ (B) $\frac{\cos x}{x} (x \rightarrow \infty)$
 (C) $\frac{x}{\sin x} (x \rightarrow 0)$ (D) $\frac{x}{\cos x} (x \rightarrow \infty)$

二、填空题 (5*3'=15')

1. 袋中有 8 个黑球, 12 个白球, 它们除颜色不同外, 其他方面没有区别。现将球随机地一只只摸出来, 则第 10 次摸出的球是黑球的概率是 = _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩 $r(A^3)$ 为 = _____.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{_____}.$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^2 \frac{n-1}{n} \pi \right) = \text{_____}.$

5. $y = \ln \tan \frac{x}{2}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \text{_____}.$

三、解答题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ (7')

2. 求不定积分 $\int \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ (7')

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求出此极值。(8')

4. 问常数 k 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 或有无穷多解, 并在有无穷多解时写出其一般解.(8')

5. 设连续型随机变量 X 的密度函数为: $f(x) = Ae^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$
求: (1) 常数 A ; (2) $P(0 < X < 1)$ (3) $E(X), D(X)$ 。(9')

6. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V 。(8')

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 且

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$$

证明: 存在两个不同的 $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。(8')

提示: 考虑函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, t \in [0, \pi]$

答题卡:

答题卡:

答题卡: