1. 设 $I=\sqrt[n]{x_1+x_2^2+x_3^3+\cdots+x_n^n}$; $I_1=\sqrt[n]{nx_n^n}=\sqrt[n]{n}\cdot x_n$; $I_2=\sqrt[n]{x_n^n}=x_n$; $I=\sqrt[n]{x_1+x_2^2+x_3^3+\cdots+x_n^n}$; $I_1=\sqrt[n]{nx_n^n}=\sqrt[n]{n}\cdot x_n$; $I_2=\sqrt[n]{x_n^n}=x_n$;

且有: $x_n=\sqrt[n]{x_n^n}<\sqrt[n]{x_1+x_2^2+x_3^3+\cdots+x_n^n}<\sqrt[n]{nx_n^n}=\sqrt[n]{n}\cdot x_n$

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot x_n=2022\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=2022;$$
$$\lim_{n\to\infty}I_2=\lim_{n\to\infty}x_n=2022;$$

由夹逼准则: $\lim_{n\to\infty}I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1+x_2^2+x_3^3+\cdots+x_n^n}=2022.$

2. 首先写出 $\sqrt{1+x^2},\cos x$ 以及 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林展开:

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2+o(x^4)$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

于是有:

$$1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]=\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$
$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

原极限可写为:

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}\right)\cos x^2}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\left[\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]\cdot1}{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}$$
$$=-\frac{3}{2}$$

3. 设 $\alpha=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2},\beta=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$, 根据和差化积公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cos\alpha\sin\beta$$

$= \lim_{n\to\infty} 2\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right)$,

因为 $\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right) \le 1$ ，所以

$\lim_{n\to\infty} 2\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right) = 0$

4. $\int_{-1}^{1}\left(x^3+\sqrt{1-x^2}\right)dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

第一个积分由于是奇函数在对称区间的积分，因此积分值为 0
第二个积分则涉及到定积分的几何意义，为原点在 (0,0)，半径为 1 的圆在 $y$ 轴正半轴上的面积

故：原式 $= 0 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$

5. （甲）令 $t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t}$，于是 $dx = d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}dt$，积分上下限为 0,1:

$\int_{1}^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_{1}^{0}(\arcsin t - t)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{0}^{1}\frac{\arcsin t - t}{t^2}dt$

$x \to 0$ 时，$\arcsin t - t \sim \frac{1}{6}t^3$，故 $\frac{\arcsin t - t}{t^2} \sim \frac{1}{6}t$，积分 $\int_0^1 \frac{1}{6}t dt$ 收敛;

故 $\int_0^1 \frac{\arcsin t - t}{t^2}dt$ 收敛.

首先计算不定积分:

$\int \frac{\arcsin t - t}{t^2}dt = \int \frac{\arcsin t}{t^2}dt - \int \frac{1}{t}dt = \int \frac{\arcsin t}{t^2}dt - \ln|t|$

重点研究第一个不定积分:

$\int \frac{\arcsin t}{t^2}dt = \int \arcsin t\, d\left(-\frac{1}{t}\right) = -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

令 $t = \sin u, dt = \cos u\,du, \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$，于是:

$\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1}{\sin u}\cdot\frac{1}{\cos u}\cdot\cos u\,du = \int \frac{1}{\sin u}du = \int \csc u\,du$

$= -\ln|\csc u + \cot u| = -\ln\left|\frac{1}{\sin u} + \cot u\right| = -\ln\left|\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right|$

$= -\left(\ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right| - \ln|t|\right) = -\ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right| + \ln|t|$

于是: $\int \frac{\arcsin t}{t^2}dt = -\frac{\arcsin t}{t} - \ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right| + \ln|t| + C_1$

综上: $\int \frac{\arcsin t - t}{t^2}dt = -\frac{\arcsin t}{t} - \ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right| + \ln|t| - \ln|t|$

$= -\frac{\arcsin t}{t} - \ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right| + C$

其定积分: $\int_0^1 \frac{\text{arcsin}t - t}{t^2} dt = \left(-\frac{\text{arcsin}t}{t} - \ln\left|1 + \sqrt{1 - t^2}\right|\right)\Big|_0^1$

$= -\frac{\text{arcsin}t}{t}\Big|_0^1 - \ln\left|1 + \sqrt{1 - t^2}\right|\Big|_0^1$

$= \left[\left(-\frac{\text{arcsin}1}{1}\right) - \left(-\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsin}t}{t}\right)\right] - \left[\ln\left|1 + \sqrt{1 - 1^2}\right| - \ln\left|1 + \sqrt{1 - 0^2}\right|\right]$

$= \left[-\frac{\pi}{2} - (-1)\right] - [\ln 1 - \ln 2] = -\frac{\pi}{2} + 1 + \ln 2$

（乙）由分部积分法， $I_m = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (\ln t)^m \, dt^{n+1} = -\frac{m}{n+1} I_{m-1}$，得出

$$I_m = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

6. （甲）证 (1)式左端

$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \left[f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right]$

$= \left[f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \left[f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - f(a)\right].$

作辅助函数 $\varphi(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) - f(x)$

则上式 $= \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi(a)$

$= \varphi'(\xi) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \varphi'(\xi)\frac{b-a}{2} \quad \xi \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$

$= \left[f'\left(\xi + \frac{b-a}{2}\right) - f'(\xi)\right]\frac{b-a}{2}$

$= f''\left(\xi + \theta\frac{b-a}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \frac{b-a}{2} \qquad \theta \in (0,1)$

$= f''(c) \cdot \frac{(b-a)^2}{4}, c = \xi + \theta\frac{b-a}{2} \in (a, b).$

（乙）设 $P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}$
(其中 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$ 分别为 $P_n(x)$ 的 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 重根, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$).
由 Rolle 定理, 在相邻二异根之间, 存在 $P'_n(x)$ 的一个根. 因此 $P_n'(x)$ 在 $P_n(x)$ 的 $m$ 个根的间隙里, 共有 $m - 1$ 个根. 又从(1)式可知, 当 $\alpha_i$ 是 $k_i > 1$ 重根时, 则 $\alpha_i$ 必是 $P'_n(x)$ 的 $k_i - 1$ 重根. 因此 $P_n'(x)$ 共有 $(m-1) + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_m - 1) = k_1 + k_2 + \cdots + k_m - 1 = n - 1$ 个根. 但 $P_n'(x)$ 是 $n - 1$ 次多项式, 故 $P_{nn}'(x)$ 也仅有 $n - 1$

个根. 所以 $P'_{nn}(x)$ 的根全为实的. 反复这样做 $n-1$ 次, 知

$P'_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 的根都是实的.

7. 记 $x_0=\frac{a+b}{2}$, 在 Taylor 展开式

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$

两端, 同时取 $[a,b]$ 上的积分. 注意右端第二项积分为 0 . 第三项的 积分, 由于导数有介值性, 第一积分中值定理成立: $\exists c\in(a,b)$, 使得

$\int_a^b f''(\xi)(x-x_0)^2\,\mathrm{d}x=f''(c)\int_a^b(x-x_0)^2\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$

因此等式成立.

$$\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^h\frac{\frac{1}{4}}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_h^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

其中$I_1=\int_0^{h^{\frac{1}{4}}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{h^{\frac{1}{4}}}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x$