# 2019-2020 学年秋冬学期微积分期中模拟考试答案

命题：丹青学业指导中心

考试时间：2019 年 10 月 26 日

一、

(1)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln(e^{x^2}+\ln(1+x^2))} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}[\ln(1+\frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2}})+x^2]} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0}(\frac{\ln(1+\frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2}})}{1-\cos x}+\frac{x^2}{1-\cos x})} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2}(1-\cos x)}+2} \\
&= e^4
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{\frac{i}{n^2}+1}+1};\ \frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1}<\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{\frac{i}{n^2+1}}+1}<\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1};
$$

而

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1}\to\frac{1}{4};\ \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}\to\frac{1}{4}
$$

由夹逼定理: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)=\frac{1}{4}$

二、

(1)

$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x^2)$ 求导得 $\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore y'=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)+\frac{2}{1+x^2})$

$dy=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)+\frac{2}{1+x^2})dx$

(2)

不难求得 $(\sinh x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

则 $(arcsinh\ x)'=\frac{1}{(\sinh y)'}=\frac{1}{\frac{e^y+e^{-y}}{2}}$

又 $(\frac{e^y+e^{-y}}{2})^2=\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{4}=\frac{e^{2y}+e^{-2y}-2}{4}+1=x^2+1$

$\therefore(arcsinh\ x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

三、

(1) 求导易证

(2) 由 (1)

$\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n}$

$\therefore a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ge\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(2\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)$

$\therefore\{a_n\}$ 无界 $\Rightarrow\{a_n\}$ 发散

四、

(1)$\forall x_0 \in [1,+\infty)$ $|\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x_0}| = 2|\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{2}|\cdot|\cos\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{2}| \le |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}|} \le \frac{1}{2}|x-x_0|$

$\forall\epsilon>0,\exists\delta=2\epsilon$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x_0}|<\epsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sin\sqrt{x}=\sin\sqrt{x_0}, f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续

(2)$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{mx^m} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{mx^m} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{m}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{m}x^{\frac{1}{2}-m} = \begin{cases} 0 & m<2 \\ \frac{1}{m}=2 & m=\frac{1}{2} \\ +\infty & m>\frac{1}{2} \end{cases} \ne g(0)=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 不存在 $m\in\mathbb{R}$ 使 $g(x)$ 为连续函数

五、由条件 $|f(0)|\le|\sin 0|=0 \Rightarrow f(0)=0$

从而 $|f'(0)| = |\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| = |\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}| = \lim\limits_{x\to 0}|\frac{f(x)}{x}| \le \lim\limits_{x\to 0}|\frac{\sin x}{x}| = 1$

六、

$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y''=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{1-x^2}y'$

$\Rightarrow (1-x^2)y''-xy'=0$

可以用数学归纳法证明:

$\forall n,(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$(用莱布尼茨)

$n=1$ 时,$(1-x^2)y''-xy'=0$ 求导得 $(1-x^2)y^{(3)}-3xy^{(2)}-y'=0$

设 $(1-x^2)y^{(k+2)}-(2k+1)xy^{(k+1)}-k^2y^{(k)}=0$

求导得 $(1-x^2)y^{(k+3)}-2xy^{(k+2)}-(2k+1)y^{(k+1)}-(2k+1)xy^{k+2}-k^2y^{(k+1)}=(1-x^2)y^{(k+3)}-(2k+3)xy^{(k+2)}-(k+1)^2y^{(k+1)}=0$

令 $x=0$ 得:$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$

又 $y'(0)=1,y''(0)=0$ $\therefore y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & n=2k \\ [(n-2)!!]^2 & n=2k+1\ (k\in\mathbb{N}^+) \\ 1 & n=1 \end{cases}$

七、

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{g(x)}{x^2}=\frac{g(x)-g(0)}{x^2}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x^2} \xlongequal[L'Hopitals]{} \lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}=\frac{3}{2}$

八、

$\forall x\in(a,+\infty)$ 由 Lagrange 中值定理 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi),\xi\in(x,x+1)$

$x\to+\infty$ 时,$\xi\to+\infty$ 从而 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=B=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A-A=0$

九、

$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ a & b \end{vmatrix} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = -\frac{(\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a})ab}{b-a} = \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$

令 $F(x)=\frac{f(x)}{x},G(x)=\frac{1}{x}$ 由 Cauchy 中值定理

$\exists\xi\in(a,b),\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ a & b \end{vmatrix} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f(\xi)-\xi f'(\xi) = \begin{vmatrix} f(\xi) & f'(\xi) \\ \xi & 1 \end{vmatrix}$

十、

(1) 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x), x\in[0,1]$, 则 $F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})=0$

$$\therefore \min_{x\in[0,1]}F(x)\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F(\frac{k}{n})=0\le \max_{x\in[0,1]}F(x)$$

由介值性 $\exists\xi\in[0,1]$ 使 $F(\xi)=0$ 则 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

(2) 令 $H(x)=f(x)-g(x)$

则 $H(x_n)=f(x_n)-g(x_n)=f(x_n)-f(x_{n+1})$

$I.$ 若 $\exists n_0\in\mathbb{N}^+$ 使得 $H(x_{n_0})=0$ 则结论成立

$II.$ 若 $\exists n_1,n_2\in\mathbb{N}^+$ 使得 $H(x_{n_1})>0, H(x_{n_2})<0$ 则由介值性结论成立

$III.$ 若 $H(x_n)$ 恒正或恒负, 由 $f$ 单调得 $x_n$ 单调, 又因为 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 则结论成立 $(\exists x f(x)=g(x))$

十一、

$F_{n+1}F_n-F_{n+2}F_{n-1}=F_{n+1}F_n-(F_{n+1}+F_n)F_{n-1}=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})-F_{n+1}F_{n-1}=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}$

$$\begin{aligned}F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}&=F_n(F_{n-1}+F_{n-2})-(F_n+F_{n-1})F_{n-1}\\&=F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2\\&=(-1)([)F_{n-1}^2-F_nF_{n-2})\\&=(-1)[F_{n-1}(F_{n-2}+F_{n-3})-(F_{n-1}+F_{n-2})F_{n-2}]\\&=(-1)^2(F_{n-2}^2-F_{n-1}F_{n-3})\\&=\cdots=(-1)^{n-2}(F_2^2-F_3F_1)=(-1)^n\end{aligned}$$

由 $F_{n+1}F_n-F_{n+2}F_{n-1}=(-1)^n$

令 $n=2m$ 得 $\frac{F_{2m-1}}{F_{2m}}<\frac{F_{2m+1}}{F_{2m+2}}\Rightarrow G_{2m-1}<G_{2m+1}$

令 $n=2m+1$ 得 $G_{2m}>G_{2m+1}$

又 $0<G_n=\frac{F_n}{F_{n+1}}\le 1$

$\therefore\{G_{2m}\}$ 和 $\{G_{2m-1}\}$ 单调有界 $\Rightarrow$ 收敛

且 $G_{2m}-G_{2m-1}=\frac{F_2m}{F_{2m+1}}-\frac{F_{2m-1}}{F_{2m}}=\frac{F_{2m}^2-F_{2m+1}F_{2m-1}}{F_{2m+1}F_{2m}}=\frac{(-1)^{2m}}{F_{2m+1}F_{2m}}\to 0$

$\therefore\{G_n\}$ 收敛, 记 $\omega=\lim\limits_{n\to\infty}G_n$

由 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\Rightarrow 1=\frac{F_{n-1}}{F_n}+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\frac{F_{n-1}}{F_n}\Rightarrow 1=\omega+\omega^2\ (n\to\infty)\Rightarrow\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$