

2019-2020 学年秋冬学期微积分期中模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

(本试卷版权属于丹青学指，禁止任何形式的非授权售卖，如有发现，请向丹青学指举报)

考试时间：2019 年 10 月 26 日

模拟期中考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考试。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、求下列极限（每题 6 分）。

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} + \ln(1 + x^2))^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{i}{n^2}} - 1 \right)$$

二、求下列导数或微分（每题六分）。

(1) $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$ ，求 dy 。

(2) 定义双曲函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ， $\operatorname{arcsinh} x$ 为 $\sinh x$ 的反函数，求 $(\operatorname{arcsinh} x)'$ 。

三、证明：

(1) $x \geq 0$ 时， $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$. (4 分)

(2)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

证明 $\{a_n\}$ 发散. (4 分)

四、

(1) $f(x) = \sin \sqrt{x}$ ，证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续. (5 分)

(2) 令 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{mx^m} & x > 0 \\ \frac{1}{3} & x \leq 0 \end{cases}$ ，问是否存在 $m \in \mathbb{R}$ ，使 $g(x)$ 为连续函数. (5 分)

五、 f 在 $[-1, 1]$ 上可导, 且 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 求证 $|f'(0)| \leq 1$. (6 分)

六、 $y = \arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$. (8 分)

七、 $g(x)$ 满足 $g(0) = g'(0) = 0, g''(0) = 3$, 令 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 试求 $f'(0)$. (7 分)

八、 f 在 $[0, 1]$ 上可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = B,$$

求证 $B = 0$. (7 分)

九、 $a < b$ 且 $ab > 0$, f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ a & b \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(\xi) & f'(\xi) \\ \xi & 1 \end{vmatrix}$. (7 分) (提示: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$)

十、

(1) f 在 $[0, 1]$ 上连续, 求证: 若 $f(0) = f(1)$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists x \in [0, 1]$ 使得 $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$. (5 分)

(2) f 和 g 在 $[a, b]$ 上连续, f 单调, 且有数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$ 使得

$$g(x_n) = f(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

证明: $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = g(x_0)$. (6 分)

十一、对 Fibonacci 数列 $\{F_n\} (F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geq 1))$, 令 $G_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, 求证 $\{G_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n$. (12 分)

(提示: 先证明 $F_{n+1}F_n - F_{n+2}F_{n-1} = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$)

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷, 大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上, 请扫描下方二维码获取。



up主 丹青学指



学指菌QQ号

答题纸:

答题纸:

答题纸:

演算紙:

演算紙: