2019-2020 学年秋冬学期高等数学期中模拟考试答案

编辑：丹青学业指导中心

考试时间：2019 年 10 月 26 日

一、选择题

1. D;

A:$f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}\backslash\{1\}$,$g(x)$ 定义域 $\mathbb{R}$

B:f 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g$ 定义域 $(0,+\infty)$

C:$f(x)=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|\in[0,1],g(x)\in[-1,1]$

2.C;

A:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\sin x}{x}=\infty$

B:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

D:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\infty$

C:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\xlongequal[L'Hopitals]{}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$

3.B;

$dy=y'dx=f'(\sin x)\cos xdx$

4.A;

$f'(x)<0(a\leqslant x\leqslant b)\Rightarrow f$ 在 $[a,b]\downarrow\Rightarrow f(x)\geqslant f(b)>0$ 故选 A

5.D;

$f(\frac{1}{x})=x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

6.B;

f 在 $x=2$ 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\Leftrightarrow 3\times 2^2-4\times 2+a=b=2+2\Leftrightarrow a=0,b=4$

7.C;

$xy^3=y-1$. 令 $x=0$ 得 $y=1$

再同时对 x 求导:

$y^3+x\cdot 3y^2\cdot y'=y'$.

将 $x=0,y=1$ 代入得 $y'|_{x=0}=1$

8.A;

$y=a\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$. $y'=-a\sin x-\sin 2x$.

$\frac{\pi}{2}$ 是极值点 $\Rightarrow y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=-a\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi=-a=0\Rightarrow a=0$

9.C;
注意罗尔定理的适用条件:
(1) 闭区间 $[a,b]$ 连续
(2) 开区间 (a,b) 可导
(3) 端点处函数值相等 $(f(a)=f(b))$

10.D;
定义域 $(0,+\infty).f(x)=\frac{\ln x}{x};f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.
则 $x\in(0,e)$ 时,$f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow$

二、填空题
1.$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$
2.$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^3+1}{6n^3-5n^2+3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^3}}{6-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
3.$C(Q)=100+400Q-Q^2.\ \ C'(Q)=400-2Q$
$C'(100)=200$
$Q=100$ 时边际成本为 200

4.$f(x)=\sqrt{x}\ln x.\ \ f'(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$
则 $x\in[1,e]$ 时,$f'(x)>0\Rightarrow f$ 在 $[1,e]\uparrow$
$\therefore max(f(x))=f(e)=\sqrt{e}(e\in[1,e])$

5.$\frac{1}{3}$;
依题 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan\frac{x^2}{3}}{ax^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan\frac{x^2}{3}}{\frac{x^2}{3}}\cdot\frac{1}{3a}=\frac{1}{3a}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$

6.$\frac{1}{e^2}$;
$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(\frac{x+1}{x-1})^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{2}{x-1})^x}=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{(1+\frac{2}{x-1})^{\frac{x-1}{2}}}]^{\frac{2x}{x-1}}=(\frac{1}{e})^2=\frac{1}{e^2}$

7.9.996667;
注意当 $|x|$ 很小时有近似公式:$\sqrt[n]{1+x}\approx1+\frac{1}{n}x$
从而 $\sqrt[3]{999}=\sqrt[3]{1000-1}=10(\sqrt[3]{1-\frac{1}{1000}})\approx10(1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1000})=10-\frac{1}{300}\approx9.996667$

8.2;
f 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\Leftrightarrow a=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1}{x}\overset{}{\underset{L'Hopitals}{=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2e^{2x}}{1}=2$

9.$dy=y'dx=(3e^{3x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

10.$2x-y=0$
$y=e^{2x}-1\ \ y'=2e^{2x}\ \ y(0)=0\ \ y'(0)=2$
曲线在 $x=0$ 处切线 $y-y(0)=y'(0)(x-0)\Rightarrow2x-y=0$

三、计算题

1. $y=\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+e^{-x}\arctan e^{x}$

$y'=\frac{2e^{2x}}{2(1+e^{2x})}+e^{-x}(-\arctan e^{x}+\frac{e^{x}}{1+e^{2x}})=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-e^{-x}\arctan e^{x}+\frac{1}{1+e^{2x}}=1-e^{-x}\arctan e^{x}$

2.$f(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}(-\frac{1}{2}x^2+x)=\frac{1}{2}e^{-x}(-x+2)x$

由导数可见:

$x<0$ 时,$f'(x)<0$ $0<x<2$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ $x>2$ 时,$f'(x)<0$

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0]$ 和 $[2,+\infty)$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,2]$

且 f 有极大值 $f(2)=\frac{2}{e^2}$ 极小值 $f(0)=0$

3.$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$(这是 $\frac{0}{0}$ 型)

由 L'Hopitals 法则: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{1+x})^2}{2}=\frac{1}{2}$

4. 令 $f(x)=x-\frac{x^3}{3}-\arctan x\quad (x\leqslant 0)$

$f'(x)=1-x^2-\frac{1}{1+x^2}$

由均值不等式 $x^2+\frac{1}{x^2+1}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}-1\geqslant 2-1=1$

$\Rightarrow 1-x^2-\frac{1}{1+x^2}\leqslant 0$ 即 $f'(x)\leqslant 0$ 等号当且仅当 $x=0$ 时取得

则 $x<0$ 时,$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减

从而 $x<0$ 时,$f(x)>f(0)=0$ 即 $\arctan x+\frac{x^3}{3}<x$

5.

(1) $L(Q)=PQ-C(Q)=[(800-Q)Q-(2000+10Q)]$ 元 $=(-Q^2+790Q-2000)$ 元

(2) 令 $L'(Q)=-2Q+790=0\Rightarrow Q=395$

且检验知 $Q=395$ 是极大值点, 亦是最大值点

且 $P(365)=800-395$ 元 $=405$ 元

生产 395 台时有最大利润, 此时售价为 405 元