2019-2020 学年秋冬学期微积分期末模拟考试

命题: 张智男 编辑：丹青学业指导中心

考试时间：2019 年 10 月 26 日

模拟期末考考试须知:

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。

2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。

3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。

4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。

5. 遵守考场纪律。

一、按要求进行计算或求解 (共 45 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$ (6 分)

解：由定积分定义，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})\\ =&\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})\\ =&\int_0^1\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x\\ =&\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1\\ =&\frac{3}{4}\end{aligned}$$

($\triangle x=\dfrac{1}{n}$,区间为$[0,1]$，被积函数为$f(x)=\sqrt[3]{x}$)

2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$ (7 分)

解：令 $2x-1=t$，得原式

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{e^{\sin\frac{t+1}{2}\pi} - e^{-\sin\frac{-(t+1)}{2}\pi}} \\
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{e^{\cos\frac{\pi}{2}t} - e^{\cos\frac{3\pi}{2}t}} \\
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{e^{\cos\frac{3\pi}{2}t}(e^{\cos\frac{\pi}{2}t-\cos\frac{3\pi}{2}t}-1)} \\
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{e^{\cos\frac{3\pi}{2}t}(\cos\frac{\pi}{2}t-\cos\frac{3\pi}{2}t)} \\
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{e^{\cos\frac{3\pi}{2}t}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}t+\frac{3\pi}{2}t}{2}\sin\frac{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t}{2}} \\
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{2e^{\cos\frac{3\pi}{2}t}\cdot\sin\pi t\cdot\sin\frac{\pi}{2}t} \\
&= \lim_{t\to\ 0} \frac{t^2}{2e^{\cos\frac{3\pi}{2}t}\cdot\pi t\cdot\frac{\pi}{2}t} \\
&= \frac{1}{e\pi^2}
\end{aligned}
$$

(如用 L'Hospital 或 Taylor 公式展开也可)

3.$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ (7 分)

解：

① $|x|\le 1$ 时，$1\le 1+|x|^{3n}\le 2$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$
由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n}=1$

② $|x|>1$ 时，$|x|^{3n}\le 1+|x|^{3n}\le 2|x|^{3n}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$
由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n}=|x|^3$
综上，

$$
f(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x\le 1; \\ |x|^3, & x>1\ x<-1; \end{cases}
$$

$$
\therefore \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1\,\mathrm{d}x+\int_1^2 |x|^3\,\mathrm{d}x=1+\frac{1}{4}x^4\Big|_1^2=1+\frac{1}{4}(16-1)=\frac{19}{4}
$$

4. 参数曲线 $\begin{cases} x=t^t \\ y=2^t \end{cases}$ $(t>0)$, 求曲线上点 (1,2) 处切线的方程 (6 分)

解：

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2^t\ln 2
$$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e^{t\ln t}}{\mathrm{d}t}=e^{t\ln t}(\ln t+1)=t^t(\ln t+1)
$$

$$
\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2^t\ln 2}{t^t(\ln t+1)}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(1,2)}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\frac{2\ln 2}{1(0+1)}=2\ln 2
$$

故切线方程为 $y-2=2\ln 2(x-1)\Leftrightarrow y=2\ln 2x+2-2\ln 2$

5. 求一组 a,b 的值，使椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的周长等于正弦曲线 $y=\sin x$ 一个周期的弧长 (6 分)

解：椭圆参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$，$0 \le t \le 2\pi$

椭圆周长

$S_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

正弦曲线一个周期弧长 $S_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y'}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

故 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$ 满足 $S_1 = S_2$

6. 求不定积分 $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ (5 分)

解：令 $\sqrt[3]{x} = t$，则原式

$$
\begin{aligned}
&= 3\int t^2 e^t\,\mathrm{d}t = 3\int t^2\,\mathrm{d}e^t \\
&= 3t^2e^t - 3\int e^t\,\mathrm{d}t^2 \\
&= 3t^2e^t - 3\int 2t\,\mathrm{d}e^t \\
&= 3t^2e^t - 6te^t + 6\int e^t\,\mathrm{d}t \\
&= 3t^2e^t - 6te^t + 6e^t + C \\
&= 3x^{\frac{2}{3}}e^{\sqrt[3]{x}} - 6x^{\frac{1}{3}}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C
\end{aligned}
$$

7. 求瑕积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$(7 分)

解：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

二、(1)$f \in C[a,b]$ $f' \in D(a,b)$ 且有 $f(a) = f(b) = 0$ ，求证：$\exists\xi \in (a,b)$ $s.t. f(\xi) = f'(\xi)$ (4 分)

(2)f 在 [a,b] 上有一直到 n 阶导数，在 (a,b) 内 n+1 阶可到，且有

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

求证：$\exists\xi \in (a,b)$ $s.t.$ $f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$(4 分)

证：(1) 令 $h(x) = e^{-x}f(x)$ $h \in C[a,b]$ $h \in D(a,b)$ $h(a) = h(b) = 0$

由 Rolle 中值定理，$\exists\xi \in (a,b)$ $s.t.$ $h'(\xi) = e^{-\xi}[f'(\xi) - f(\xi)] = 0$，即 $f(\xi) = f'(\xi)$

(2) 令 $g(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)$，则 $g \in C[a,b]$, $g \in D(a,b)$, $g(a) = g(b) = 0$

由 (1) 知，$\exists\xi\in(a,b)\ s.t.\ g'(\xi)=e^{-\xi}[\sum\limits_{k=0}^{n}f^{(k+1)}(\xi)-\sum\limits_{k=0}^{n}f^{(k)}(\xi)]=0$，即 $f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$

三、f 在 [0,1] 上二阶可导，且有 $f(0)=f(1)=0\ \min_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，求证：

$\exists\xi\in(0,1)\ s.t.\ f''(\xi)\geq 8(9$ 分)

证：由连续性与费马定理，$\exists x_0\in[0,1]\ s.t.\ f(x_0)=-1\ f'(x_0)=0$，在 $x=x_0$ Taylor 展开

$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1){x_0}^2$，$\xi_1\in(0,x_0)$

$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$，$\xi_2\in(x_0,1)$

于是 $f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}$ ，$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$

记 $f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi-2)\}$

则 $f''(\xi)=\max\{\frac{2}{x_0^2},\frac{2}{(1-x_0)^2}\}\geq\sqrt{\frac{2\times 2}{x_0^2(1-x_0)^2}}=\frac{2}{x_0(1-x_0)}\geq\frac{2}{(\frac{x_0+1-x_0}{2})^2}=8$

四、$f(x)=\begin{cases}\cos x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

(1) 说明 f(x) 在 $x=0$ 处间断，从而 $F'(0)\neq f(0)$ 并判断是什么类型的断点 (4 分)

(2) 求 F'(0)(7 分)

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$

取 $n=2k\pi$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\cos 2k\pi=1$

取 $n=(2k+1)\pi$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\cos(2k+1)\pi=-1$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 不存在，x=0 为 f 的第二类间断点 (2)$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t}{x}$，而

$$\begin{aligned}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t&=\int_0^x(-t^2)\,\mathrm{d}\sin\frac{1}{t}=-t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x+\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t^2\\&=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2\sin\frac{1}{x}+2\displaystyle\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\\&=\lim_{x\to 0}(-x\sin\frac{1}{x})+\lim_{x\to 0}\frac{2\displaystyle\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\\&=2\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\end{aligned}$$

又 $t\sin\dfrac{1}{t}$ 在 t=0 处连续，由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

即 $F'(0)=0$

五、Γ 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\quad(x>0)$$

证明: (1)$\forall n\in Z_+,\Gamma(n+1)=n!$(5 分)

(2) 令 $\psi(x)=\log\Gamma(x)$，求证 $\psi(x)$ 为下凸函数 (7 分)

提示:

(i) 一般地，求导和积分顺序不能交换，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\infty} f(t;x)\,\mathrm{d}x\right) \neq \int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}f(t;x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}t$$

(ii) $H\ddot{o}lder$不等式:$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时 $(p,q>0)$,

$$\int_0^{+\infty}|f(x)g(x)\,\mathrm{d}x| \leq \left[\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{+\infty}|g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}$$

证：(1)

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{d}e^{-t} = -t^{x-1}e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t^{x-1}\\ &= (x-1)\Gamma(x-1)\end{aligned}$$

又

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

(2)$\psi(x) \quad \Leftrightarrow \forall\lambda\in[0,1], \forall x,y>0,\ \psi(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda\psi(x)+(1-\lambda)\psi(y)$
即要证 $\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq (\Gamma(x))^{\lambda}(\Gamma(y))^{1-\lambda}$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{+\infty} t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\lambda}\left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{1-\lambda}\mathrm{d}t\\ &\leq \left(\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}\\ &= (\Gamma(x))^{\lambda}(\Gamma(y))^{1-\lambda}\end{aligned}$$

结论成立

六、(1) 按定义证明：给定 $a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$(4 分)

(2) 设 $a,b,n\in N$，$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$，证明

(i)$f^{(k)}(x)$ $(0\leq k\leq 2n)$ 当 $x=0, x=\frac{a}{b}$ 时取整数值，当 $k\geq 2n+1$ 时，$f^{(k)}(x)=0$(4 分)

(ii) 假设 $\pi=\frac{b}{a}\in Q$，证明 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ 是正整数 $(\forall n\in N)$(4 分)

(iii) 证明：$\forall a,b\in Z$，对任意的 n, $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ 不可能总是正整数，那么与 (ii) 矛盾，从而得证 π 是无理数

证：(1)

① $0<a\leq 1$ 时，$\forall c>0, \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ $s.t.$ $n\geq N$ 时

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \text{即} \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

② $a>1$ $\forall\varepsilon>0, \exists N_1=[a^2]+1, N_2=\left[-\frac{\ln N_1!\varepsilon}{\ln a}\right]+1$, $s.t.$ $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right| = \left|\frac{a^N}{N!}\frac{a^{n-N}}{(N+1)\cdots n}\right| \leq \frac{a^n}{N!}\left(\frac{a}{a^2}\right)^{n-N} = \frac{a^n}{N!}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-N} = \frac{1}{N!}a^{-n} < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

综上，$\forall a>0.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

(2)(i) 由莱布尼茨公式，

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\ (x^n)^{(i)}\left[(a-bx)^n\right]^{(k-i)} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\ n(n-1)\cdots(n-i+1)x^{n-i}\left[(a-bx)^n\right]^{(k-i)} \end{aligned}$$

① $k\le n-1$ 时，每项中都含 x 因子，所以 $f^{(k)}(0)=0$

② $k\ge n$ 时，如果 $i>n$，则 $(x^n)^{(i)}=0$，故

$$f^{(k)}(0)=\left.\frac{1}{n!}C_k^n n!\left[(a-bx)^n\right]^{(k-n)}\right|_{x=0}=\left.C_k^n\left[(a-bx)^n\right]^{(k-n)}\right|_{x=0}$$

是一个整数

③ $k\ge 2n+1$ 时，由 $f(x)$ 为 2n 次多项式，$f^{(k)}(x)=0$

再由对称性，

$$f(\frac{a}{b}-x)=\frac{(\frac{a}{b}-x)^n[a-b(\frac{a}{b}-x)]^n}{n!}=\frac{(a-bx)^nx^n}{n!}=f(x)$$

可以知道，$f^{(k)}(\frac{a}{b})$ 为整数 $(k\le 2n)$；当 $k\ge 2n+1$ 时，$f^{(k)}(\frac{a}{b})=0$

(ii) 假设 $\pi=\frac{a}{b}$，则

$$\begin{aligned} \int_9^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= -f(x)\cos x|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = f'(x)\sin x|_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi f''(x)\,\mathrm{d}\cos x = f''(x)\cos x|_0^\pi-\int_0^\pi \cos x f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= Z_1-\int_0^\pi f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}\sin x=\cdots=Z_{n-2}+(-1)^nZ_{n-1}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由 (i) 知 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n-2},Z_{n-1}\in Z$，因而 $\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\in Z$

(iii) 易知在 $(0,\pi)=(0,\frac{a}{b})$ 上，$f(x)>0,\sin x>0,\therefore\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\ge 1$

当 $x\in(0,\pi)=(0,\frac{a}{b})$ 时，有

$$\begin{aligned} 0<f(x)=\frac{1}{n!}(ax-bx^2)^n=\frac{1}{n!b^n}[abx-(bx)^2]^n &= \frac{1}{n!b^n}\left[(\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2}-bx)^2\right]^n \\ &\le \frac{1}{n!b^n}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{n!}(\frac{a}{b})^n(\frac{a}{4})^n=\frac{1}{n!}(\frac{\pi a}{4})^n \end{aligned}$$

$$\therefore\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\le\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^\pi\frac{1}{n!}(\frac{\pi a}{4})^n\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n!}(\frac{\pi a}{4})^n$$

于是 $1\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_0 f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\le\pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{\pi a}{4})^n}{n!}=0$，矛盾！

$\left(ax-bx^2\le a\cdot\dfrac{a}{2b}-b(\dfrac{a}{2b})^2=\dfrac{a^2}{2b}-\dfrac{a^2}{4b}=\dfrac{a^2}{4b}=\dfrac{\pi}{4}a\right)$ 因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描下方二维码获取。

up主 丹青学指　　学指菌QQ号

答题纸:

答题纸:

答题纸:

演算纸:

演算纸: