

2019-2020 学年秋冬学期高等数学期末模拟考试

编辑：丹青学业指导中心

考试时间：2019 年 10 月 26 日

模拟期末考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、填空 (每题 3 分, 共 27 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}\tan\frac{x}{2}}$ 的定义域为 $\{x|x > 1 \text{ 且 } x \neq k\pi(k \in \mathbb{Z})\}$

2. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} + ax, & x > 0 \end{cases}$ 在 0 处一阶可导, 则 $a = \underline{-2}$

3. 计算极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2019}{n})^n = \underline{e^{-2019}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \underline{-\frac{1}{3}}$$

4. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x} (x \neq 0)$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2} e^{x^2}$, $f''(x) = \underline{(4x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3})e^{x^2}}$

5. 求微分:

$$x^2 + ye^{x^2} = 1, dy = \underline{-\frac{2xe^y + 2xye^{x^2}}{x^2e^y + e^{x^2}} dx}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 2017 & 2018 & 2019 & 2010 \\ 2018 & 2019 & 2010 & 2021 \\ 2019 & 2010 & 2021 & 2022 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $r(A) = \underline{2}$

7. $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $A^{2019} = \begin{pmatrix} \cos 2019\theta & \sin 2019\theta \\ -\sin 2019\theta & \cos 2019\theta \end{pmatrix}$

8. A, B 独立, $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.7$, $P(A + B) = \underline{0.79}$

9. 有两个盒子 A, B. A 盒有 3 个红球, 2 个白球. B 盒有 5 个红球, 3 个白球. 随机抽取一个盒子, 抽到 A 盒则从中抽一个球, 抽到 B 盒则同时 (不放回) 抽两个球, 恰拿到一个红球的概率为 $\underline{\frac{159}{280}}$

二、假设一家银行的年利率为 100% , 可自由选择复利 (如可分为两次 5 年存, 每次利率为 50%), 请问如果能实现无限次的利滚利, 10 年后本息和会无限增大吗? 如果不能无限增大, 最高能达到多少?(7 分)

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \Rightarrow$ 最高达 e 万元.

三、计算积分 (每题 6 分, 共 18 分)

(1) $\int \frac{1}{x^3-1} dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3-1} dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx \\
&= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} \right] dx \\
&= \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx + C \\
&= \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx + C \\
&= \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} dt + C (t = x + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{1}{6} \ln(t^2 + \frac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2}) + C
\end{aligned}$$

(2) $\int (2x+5)^{2019} dx$

解:

令 $t = 2x + 5$,

$$= \int t^{2019} dt = \frac{t^{2020}}{4040} = \frac{(2x+5)^{2020}}{4040}$$

(3) $\int_0^{100} |x^2 - 2500| dx$

解:

$$= -\int_0^{50} (x^2 - 2500) dx + \int_{50}^{100} (x^2 - 2500) dx$$

$$= \int_0^{50} t(t+100) dt - \int_0^{50} (x-50)(x+50) dx$$

$$= \int_0^{50} t(t+100) dt - \int_{-50}^0 t(t+100) dt$$

$$= \frac{50^3}{3} + 100 \times \frac{50^2}{2} - \left[\frac{50^3}{3} - 100 \times \frac{50^2}{2} \right]$$

$$= 250000$$

四、求 C: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 围成的面积。

解:

$$S = 2 \int_{-2}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

令 $x = 2 \sin^2 \theta$,

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} d2 \sin \theta$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = 2\pi$$

五、

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \text{求 } \mathbf{AB}.$$

解:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{I} \times \mathbf{A}^2$$

$$= -\mathbf{I} \begin{pmatrix} 14 & 20 & 26 \\ 20 & 29 & 38 \\ 26 & 38 & 50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -20 & -26 \\ -20 & -29 & -38 \\ -26 & -38 & -50 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{计算: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

解:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-10) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-10) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-40) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

七、一个袋中放有 5 只球编号为 15, 先从袋中取出一只球, 记录编号 x 后放会, 再从袋中同时取两只球, 记录其中号码较大的为 $y, Z \triangleq \max\{x, y\}$.

(1) 求 Z 的分布.

解:

$$P(Z=1)=0, P(Z=2)=\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{25}$$

$$P(Z=3)=\frac{7}{50}, P(Z=4)=\frac{3}{10}, P(Z=5)=\frac{13}{25}$$

(2) 求 $\mathbf{E}Z$, 并列式计算 $\text{Var}Z$ 的算式.

解:

$$\mathbf{E}Z = 4.3$$

$$\text{Var}Z = \frac{(2.3)^2}{25} + \frac{7}{50} \times (1.3)^2 + \frac{3}{10} \times (0.3)^2 + \frac{13}{25} \times (0.7)^2$$

五、 $X \sim N(3, 100)$

① 求 X 的密度函数

② 已知 $\phi(1) = 0.4183$, $\phi(2) = 0.9712$, 求 $P(-17 \leq x \leq 13)$

解:

$$\textcircled{1} P(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{200}}$$

$$\textcircled{2} \frac{x-3}{10} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(-17 \leq x \leq 13) &= P(-2 \leq \frac{x-3}{10} \leq 1) = \phi(1) - \phi(-2) \\ &= \phi(1) + \phi(2) - 1 = 0.4183 + 0.9712 - 1 \\ &= 0.4183 - 0.0288 = 0.3895 \end{aligned}$$

六、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$$

a 取何值时,

$$AX = B \quad \begin{cases} \textcircled{1} \text{ 无解} \\ \textcircled{2} \text{ 唯一解} \\ \textcircled{3} \text{ 无穷多解} \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned} \det A &= (a^2 - 1) + (2a + 1) - (2 + a) \\ &= a^2 - 1 + a - 1 = a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a \neq 1, -2$ 时, 必有唯一解。

$$a = 1 \text{ 时: } (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss 消元}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{无穷多解}$$

$$a = -2 \text{ 时: } (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss 消元}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss 消元}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right) \quad \text{矛盾!} \quad \Rightarrow \text{无解}$$



up主 丹青学指



学指菌QQ号

答题纸:

答题纸:

答题纸:

演算紙:

演算紙: