线代期中模拟

2024年4月9日 星期二　00:09

一、（本题 10 分）计算下列行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} x_1^{2023} & x_1^{2022}y_1 & \cdots & y_1^{2023} \\ x_2^{2023} & x_2^{2022}y_2 & \cdots & y_2^{2023} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2024}^{2023} & x_{2024}^{2022}y_{2024} & \cdots & y_{2024}^{2023} \end{vmatrix}$$

解：Case 1. 若 $x_i\ (i=1,2,\cdots,2024)\neq 0$.

则

$$D=(x_1x_2\cdots x_{2024})^{2023}\begin{vmatrix} 1 & \frac{y_1}{x_1} & \cdots & (\frac{y_1}{x_1})^{2023} \\ 1 & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & (\frac{y_2}{x_2})^{2023} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{y_{2024}}{x_{2024}} & \cdots & (\frac{y_{2024}}{x_{2024}})^{2023} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行列式}]{\text{VanderMonde}} (x_1x_2\cdots x_{2024})^{2023}\prod_{1\le i<j\le 2024}\left(\frac{y_j}{x_j}-\frac{y_i}{x_i}\right)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le 2024}(x_iy_j-x_jy_i)\quad (*)$$

Case 2. 若 $\exists\, 1\le p<q\le 2024$, s.t $x_p=x_q=0$.

则

$$D=\begin{vmatrix} x_1^{2023} & x_1^{2022}y_1 & \cdots & x_1y_1^{2022} & y_1^{2023} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_p^{2023} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_q^{2023} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{2024}^{2023} & x_{2024}^{2022}y_{2024} & \cdots & x_{2024}y_{2024}^{2022} & y_{2024}^{2023} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xlongequal{\text{按第}p\text{行展开}} (-1)^{p+2024}y_p^{2023}\begin{vmatrix} x_1^{2023} & x_1^{2022}y_1 & \cdots & x_1y_1^{2022} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2024}^{2023} & x_{2024}^{2022}y_{2024} & \cdots & x_{2024}y_{2024}^{2022} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}=0$$

注意到此时 (*) 式也为 0.

$\therefore D=0=\prod_{1\le i<j\le 2024}(x_iy_j-x_jy_i)$

Case 3. 若有且仅有一个 $x_k\ (1\le k\le 2024)$, s.t $x_k=0$

则 $D\xlongequal{\text{按第}k\text{行展开}}(-1)^{k+2024}y_k^{2023}(x_1\cdots x_{k-1}x_{k+1}\cdots x_{2024})^{2023}\prod_{\substack{1\le i<j\le 2024\\ i,j\neq k}}\left(\frac{y_j}{x_j}-\frac{y_i}{x_i}\right)$

$$=(-1)^{k+2024}y_k^{2023}(x_1\cdots x_{k-1}x_{k+1}\cdots x_{2024})\prod_{\substack{1\le i<j\le 2024\\ i,j\neq k}}(x_iy_j-x_jy_i)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le 2024}(x_iy_j-x_jy_i)$$

综上，$D=\prod_{1\le i<j\le 2024}(x_iy_j-x_jy_i)$ #

二、（本题 10 分）计算下列 $2n$ 阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

解：由 Laplace 定理，得

$$D\xlongequal[\text{最后一行展开}]{\text{按第一行与}}(a^2-b^2)D_{2n-2}$$

$$\xlongequal[\text{最后一行展开}]{\text{按第一行与}}(a^2-b^2)^2D_{2n-4}$$

$$=\cdots$$

$$=(a^2-b^2)^n \quad \#$$

三、（本题 10 分）当实数 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=\lambda^2 \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=\lambda^3 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷解？

解：记

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix},\quad \widetilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array}\right]\xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{把第}i\text{行}(i>1)}\left[\begin{array}{cccc:c} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 & 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array}\right]$$

Case 1. 若 $\lambda+3=0$（即 $\lambda=-3$），则 $r(A)<r(\widetilde{A})$. 故线性方程组无解.

若 $\lambda+3\neq 0$，则

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 & 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{\lambda+3}]{\text{第一行乘}}\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3}{\lambda+3} \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{减第一行}]{\text{第}i\text{行}(i>1)}\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & s \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-s \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda^2-s \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda^3-s \end{array}\right],\ \text{其中 } s=\frac{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3}{\lambda+3}$$

Case 2. 若 $\lambda=1$，则 $r(A)=r(\widetilde{A})=1<4$，故线性方程组有无穷解.

Case 3. 若 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -3$，则 $r(A)=r(\widetilde{A})=4$.

故线性方程组有唯一解. #

四、（本题 10 分）求矩阵 A 的逆阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$(A\,\vdots\,E)=\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & & & & \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & & 1 & & & \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{把第}i\text{行}(i>1)}\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} s & s & s & \cdots & s & s & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & & 1 & & & \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

记 $s=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$\xrightarrow{\text{第一行乘以}\frac{1}{s}}\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & & 1 & & & \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

第 $i\ (i\ge 2)$ 行减第 $i+1$ 行. 从上往下减

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & & 1 & -1 & & \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & & & 1 & -1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & -1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

第 $i\ (2\le i\le n-1)$ 行减第一行、第一行乘 (-2) 加到第 n 行.

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & \frac{s-2}{s} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2\le i\le n-1]{\text{第}i\text{行乘}-\frac{1}{n}}\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & \frac{s-2}{s} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{第}n\text{行}(2\le i\le n-1)]{\text{第}i\text{行乘}-i+1\text{加到}}\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{s+1}{ns} & -\frac{1}{ns} & -\frac{1}{ns} & \cdots & \frac{s-1}{ns} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第}n\text{行乘}(-1)}\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1-s}{ns} \end{array}\right]$$

第 i 行乘 (-1) 加到第 1 行. $(i\ge 2)$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & -\frac{s-1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1-s}{ns} \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{ns}\begin{bmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1-s \end{bmatrix}\ \#$$

五、（本题 15 分）

(1) 叙述秩的定义;

(2) 证明方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$;

(3) 若 A 是方阵，证明：$AA^*=A^*A=|A|E$, 其中 E 是单位阵

(1) $r(A)=r \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A 有一个 r 阶子式不为零. A 的所有 $r+1$ 阶子式都为零.

(2) 必要性：$\because$ A 可逆

$\therefore$ 存在初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$.

s.t $A=P_1P_2\cdots P_s$

由 $|A|=|P_1P_2\cdots P_s|=|P_1||P_2|\cdots|P_s|\neq 0$ 知 $|A|\neq 0$.

充分性：$\because |A|\neq 0$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$ 存在.

$\therefore$ A 可逆.

(3) 证明：
$$A\cdot A^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$\because \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=|A|$

$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$, $(i\neq k)$

$\therefore A\cdot A^*=|A|E$. #

Rem 1：给出 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0\ (i\neq k)$ 的证明：

构造
$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$$

则 $0=|B|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}$.（将 B 按第 k 行展开）#

六、（本题 15 分）如果 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足条件：

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$$

则称 A 是一个严格对角占优阵，求证：严格对角占优阵必是可逆阵。

证明：假设 A 奇异. 则 $AX=0$ 必有非零解 X.

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$. 记 x_i 为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中绝对值最大数.

$\because a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n=0$

$\therefore a_{ii}x_i=-(a_{i1}x_1+\cdots+a_{i,i-1}x_{i-1}+a_{i,i+1}x_{i+1}+\cdots+a_{in}x_n)$

$\therefore |a_{ii}||x_i|=|a_{i1}x_1+\cdots+a_{i,i-1}x_{i-1}+a_{i,i+1}x_{i+1}+\cdots+a_{in}x_n|$

$\le |a_{i1}||x_1|+\cdots+|a_{i,i-1}||x_{i-1}|+|a_{i,i+1}||x_{i+1}|+\cdots+|a_{in}||x_n|$

$\therefore |a_{ii}|\le |a_{i1}|\cdot\frac{|x_1|}{|x_i|}+\cdots+|a_{i,i-1}|\cdot\frac{|x_{i-1}|}{|x_i|}+|a_{i,i+1}|\frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}+\cdots+|a_{in}|\cdot\frac{|x_n|}{|x_i|}$

其中 $\left|\frac{x_j}{x_i}\right|\le 1$, $j=1,2,\cdots,n$.

这与 $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ 矛盾！

$\therefore$ A 必是可逆阵. #

七、（本题 15 分）设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，证明：

（1）$A=BC$，其中 B 是 $m\times r$ 矩阵且 $r(B)=r$，C 是 $r\times n$ 矩阵且 $r(C)=r$，这种分解称为 A 的满秩分解；

（2）若 A 有两个满秩分解 $A=B_1C_1=B_2C_2$，则存在 r 阶可逆阵 P，使得 $B_2=B_1P$，$C_2=P^{-1}C_1$；

证明：(1) $\because$ 存在初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s\in\mathbb{F}^{m\times m}$ 与初等阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t\in\mathbb{F}^{n\times n}$,

使得 $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

记 $P=P_1P_2\cdots P_s\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $Q=Q_1Q_2\cdots Q_t\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 则有

$$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\left(P^{-1}\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} E_r & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}\right).$$

令 $B=P^{-1}\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times r}$, $C=[E_r\ \vdots\ 0]\,Q^{-1}\in\mathbb{F}^{r\times n}$.

则 $A=BC$. 且 $r(B)=r(C)=r$.

(2) $\because B_i\in\mathbb{F}^{m\times r}$, $C_j\in\mathbb{F}^{r\times n}$, 且 $r(B_i)=r(C_j)=r$, $i,j=1,2$.

$\therefore$ 存在可逆阵 $G_i\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $H_j\in\mathbb{F}^{n\times n}$, s.t

$G_iB_i=\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_jH_j=[E_r\ 0]$.

考虑 $S_i\in\mathbb{F}^{r\times m}$, $T_j\in\mathbb{F}^{n\times r}$. 且 $r(S_i)=r(T_j)=r$, $i,j=1,2$.

同理，存在可逆阵 $M_i\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $N_j\in\mathbb{F}^{n\times n}$, s.t

$S_iM_i=[E_r\ 0]$. $N_jT_j=\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}$

于是有 $S_iM_iG_iB_i=E_r$, $C_jH_jN_jT_j=E_r$.

令 $U_i=S_iM_iG_i\in\mathbb{F}^{r\times m}$, $V_j=H_jN_jT_j\in\mathbb{F}^{n\times r}$

则有 $U_1B_1=E_r$, $C_1V_1=E_r$, $U_2B_2=E_r$, $C_2V_2=E_r$

$\therefore B_2=B_2E_r=B_2C_2V_2=B_1C_1V_2$

$C_2=E_rC_2=U_2B_2C_2=U_2B_1C_1$

记 $P=C_1V_2$, $Q=U_2B_1$. 此时 $P,Q\in\mathbb{F}^{r\times r}$

则 $QP=U_2B_1C_1V_2=U_2B_2C_2V_2=E_r$.

即 $Q=P^{-1}$. #

八、（本题 15 分）设 A 为 n 阶矩阵，其主对角线元素全为 0，其余元素全为 1 或 -1.
求证：$r(A)\ge n-1$.

证明：当 $n=1,2$ 时，结论显然成立.

当 $n\ge 3$ 时，

$$\text{记 } A_n=\begin{bmatrix} 0 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ \pm1 & 0 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

利用第 n 列，通过列变换消去第一行中从第 2 列到第 $n-1$ 列的元素，并将第 n 列加到第一列上去.

$$A_n\longrightarrow B_n=\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 & \cdots & \pm1 \\ \sigma_{21} & \pm1 & \sigma_{23} & \cdots & \pm1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \pm1 \end{bmatrix},\ \text{其中 } \sigma_{ij}=0\text{ 或 }\pm2\text{，必为偶数.}$$

考虑 B_n 的第 (n,n) 元素的余子式

$$\widetilde{B}=\begin{vmatrix} \pm1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_{21} & \pm1 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2,n-1} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \pm1 & \cdots & \sigma_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \sigma_{n-1,3} & \cdots & \pm1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}\pm\begin{vmatrix} \pm1 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2,n-1} \\ \sigma_{32} & \pm1 & \cdots & \sigma_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n-1,2} & \sigma_{n-1,3} & \cdots & \pm1 \end{vmatrix}$$

由行列式的组合定义，展开式中只有一项为 (±1) 的乘积为奇数，其余各项中均出现 σ_{ij}，则乘积为偶数. 故 $\widetilde{B}\neq 0$.

$\therefore r(B_n)\ge n-1$

$\therefore r(A)\ge n-1$. #