

# 浙江大学 Zhejiang University

## 微积分 (甲)II 学年 2023-2024

### 微积分模拟考 – 2024 春夏微积分 (甲)

2024/04/09

时间规定: 2 小时

#### 考试须知

欢迎参加本次微积分模拟考试。为了确保你们能够在考试中表现出自己最好的状态，请仔细阅读以下考试须知：

- 考试书写：**所有答案必须用蓝色或黑色墨水的笔书写。铅笔仅用于绘图和草稿。
- 时间管理：**考试时长将严格执行，请在规定的时间内完成所有题目。考试结束信号一响，即停止答题，并保持安静，直到所有试卷收回。
- 题目理解：**请仔细阅读题目指令，确保理解所提出的问题。若有疑问，可以举手询问监考老师，但老师不会提供关于题目内容的任何提示。
- 诚信原则：**我们强调诚信的考试环境。请严守学术诚信，不抄袭、不作弊。[Waring]Do you have anything say to me?
- 考试过程：**不允许交头接耳、作弊或任何形式的不正当行为。一经发现，将立即取消考试资格，并根据学院的规定处理。

**Question 1.** (8 marks)

求直线  $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi: x - 4y - 8z + 12 = 0$  上的投影直线方程

**Question 2.** (8 marks)

求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$  在  $xOy$  平面和  $yOz$  平面上的投影曲线方程.

**Question 3.** (8 marks)

在平面  $x + y + z + 1 = 0$  内求垂直于直线  $\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x + 3z = 0 \end{cases}$  的直线方程.

**Question 4.** (8 marks)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} x^{2n}$  的收敛半径、收敛区间及收敛域, 并求其和函数.

**Question 5.** (8 marks)

设  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $|f'(x)| \leq M$  ( $M$  为常数)

证明: (1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (f(\frac{1}{2^n}) - f(\frac{1}{2^{n+1}}))$  绝对收敛; (2) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{2^n})$  存在.

**Question 6.** (8 marks)

- (1) 写出  $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$  展开成  $x$  的幂级数展开式, 并写出其收敛域;
- (2) 积分  $\int_0^1 (e^{x^2} + e^{-x^2}) dx$  与积分  $\int_0^1 (e^{x^3} + e^{-x^3}) dx$  谁大谁小, 并请说明理由.

**Question 7.** (10 marks)

设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  满足:  $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}, a_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$ ,

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$  收敛.

**Question 8.** (8 marks)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$  的收敛半径及收敛区间, 并讨论收敛区间端点处的敛散性.

**Question 9.** (8 marks)

设  $z = xf(x+y) + yg(x+y)$ , 且  $f, g$  二阶可导, 证明:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

**Question 10.** (8 marks)

将  $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$  展开成  $x$  的幂级数, 并求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  的和.

**Question 11.** (8 marks)

假设我们有一个周期为  $T$  的函数  $f(x)$ , 可以表示为:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

现在我们来求  $f(x)$  的傅里叶级数展开式。

**Question 12.** (10 marks)

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  满足  $a_n > 0$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = l$ , 其中  $l$  可以是实数或  $\infty$ , 证

明下述命题:

(1) 若  $l > 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。

(2) 若  $l < 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散。

**END OF PAPER**