浙江大学 2023 -2024 学年春夏学期

《线性代数（甲）》课程期中模拟考试

一、（本题 10 分）计算下列行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} x_1^{2023} & x_1^{2022}y_1 & \cdots & y_1^{2023} \\ x_2^{2023} & x_2^{2022}y_2 & \cdots & y_2^{2023} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2024}^{2023} & x_{2024}^{2022}y_{2024} & \cdots & y_{2024}^{2023} \end{vmatrix}$$

二、（本题 10 分）计算下列 $2n$ 阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

三、（本题 10 分）当实数 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = \lambda^3 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷解？

四、（本题 10 分）求矩阵 A 的逆阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}$$

五、（本题 15 分）

(1) 叙述秩的定义;

(2) 证明方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$;

(3) 若 A 是方阵，证明：$AA^* = A^*A = |A|E$, 其中 E 是单位阵

六、（本题 15 分）如果 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足条件：

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

则称 A 是一个严格对角占优阵，求证：严格对角占优阵必是可逆阵。

七、（本题 15 分）设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，证明：

（1）$A = BC$，其中 B 是 $m \times r$ 矩阵且 $r(B) = r$，C 是 $r \times n$ 矩阵且 $r(C) = r$，这种分解称为 A 的满秩分解；

（2）若 A 有两个满秩分解 $A = B_1C_1 = B_2C_2$，则存在 r 阶可逆阵 P，使得 $B_2 = B_1P$，$C_2 = P^{-1}C_1$；

八、（本题 15 分）设 A 为 n 阶矩阵，其主对角线元素全为 0，其余元素全为 1 或 -1.

求证：$r(A) \geq n - 1$.