浙江大学 Zhejiang University

微积分 (甲)II 学年 2023-2024

微积分模拟考 – **2024** 春夏微积分 (甲)

2024/04/09　　　　　　　　　　　　　时间规定: 2 小时

考试须知

欢迎参加本次微积分模拟考试。为了确保你们能够在考试中表现出自己最好的状态，请仔细阅读以下考试须知：

1. 考试书写：所有答案必须用蓝色或黑色墨水的笔书写。铅笔仅用于绘图和草稿。
2. 时间管理：考试时长将严格执行，请在规定的时间内完成所有题目。考试结束信号一响，即停止答题，并保持安静，直到所有试卷收回。
3. 题目理解：请仔细阅读题目指令，确保理解所提出的问题。若有疑问，可以举手询问监考老师，但老师不会提供关于题目内容的任何提示。
4. 诚信原则：我们强调诚信的考试环境。请严守学术诚信，不抄袭、不作弊。[**Waring**]Do you have anything say to me?
5. 考试过程：不允许交头接耳、作弊或任何形式的不正当行为。一经发现，将立即取消考试资格，并根据学院的规定处理。

Question 1. (8 marks)

求直线$L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 在平面$\pi: x-4y-8z+12=0$ 上的投影直线方程

Solution 1. (8 marks)

方向$\boldsymbol{v}=(1,5,1)\times(1,0,-1)=(-5,2,-5)$

而$\boldsymbol{n}_1=(1,-4,-8)$, 有$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}_1=(-36,-45,18)$

($\boldsymbol{n}_2$ 是过L 且与π 垂直的平面法向量)

L $(-2,0,2)$,

$-36(x+2)-45y+18(z-2)=0$

即$4x+5y-2z+12=0$。所求直线即两平面交线

$$\begin{cases} x-4y-8z+12=0 \\ 4x+5y-2z+12=0 \end{cases}$$

Question 2. (8 marks)

. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在xOy 平面和yOz 平面上的投影曲线方程.

Solution 2. (8 marks)

解:(1) 在xOy 平面上有$z=0$ 成立. 此时将曲线方程中的z 消去.

将$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入$x^2+y^2+z^2=a^2$ 中, 则有$x^2+y^2+(x^2+y^2)=a^2$, 即$x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}$.

从而投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{a^2}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

(2) 由$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得$x^2=z^2-y^2$, 将其代入$x^2+y^2+z^2=a^2$ 中, 则有$2z^2=a^2$.

此时由于该等式不含y, 从而要确定y 的范围.

根据$\dfrac{a^2}{2}=z^2=x^2|+y^2\geq y^2$,则有$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|a|\leq y\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}|a|$.

从而投影曲线方程为

$$\begin{cases} 2z^2=a^2, \\ x=0. \end{cases} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}|a|\leq y\leq\frac{\sqrt{2}}{2}|a|\right)$$

Question 3. (8 marks)

在平面$x+y+z+1=0$ 内求垂直于直线$\begin{cases} y-z+1=0, \\ x+3z=0 \end{cases}$ 的直线方程.

Solution 3. (8 marks)

解: 设所求直线的方向向量为 v, 已知直线的方向向量为 $v_0=(3-0)\vec{i}-[0-(-1)]\vec{j}+(0-1)\vec{k}=(3,-1,-1)$. 又给定平面的法向量为 $n=(1,1,1)$, 由题则有 $n\perp v, v_0\perp v$ 成立.

则此时可取 $v_0=n\times \boldsymbol{v_0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=[-1-(-1)]\vec{i}-(-1-3)\vec{j}+(-1-3)\vec{k}=(0,4,-4)$

因为所求直线在平面 $x+y+z+1=0$ 上，则设直线过点 $(x_0,y_0,-x_0-y_0-1)$.

则直线可表示为 $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{4}=\frac{z-(-x_0-y_0-1)}{-4}$.

化简即$\begin{cases} x=x_0, \\ y+z+x_0+1=0. \end{cases}$ (其中x_0 为任意常数)

Question 4. (8 marks)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛半径、收敛区间及收敛域, 并求其和函数.

Solution 4. (8 marks)

$$(1)\ 记 a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n},\quad 由 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\right|}=|x|^2 可得,$$

当 $\left|x\right|<1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $\left|x\right|>1$ 时, 级数发散;

当 $|x|=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 条件收敛.

故, 级数的收敛半径$R=1$, 收敛域为$[-1,1]$.

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\Big)'dx$$

$$=x\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n\Big]dx=x\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=x\arctan x.$$

当$x=\pm1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 条件收敛, 故, 级数的收敛域为$[-1,1]$.

Question 5. (8 marks)

设$f(x)$在区间$(0,1)$ 内可导, 且$|f'(x)| \leq M$(M 为常数)

证明:(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}}))$绝对收敛;(2) 极限$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2^n})$存在.

Solution 5. (8 marks)

(1)由拉格朗日中值定理,$\exists \xi \in (\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n})$ 使得

$$\left|f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})\right| = f'(\xi)(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}) = f'(\xi)\frac{1}{2^{n+1}} \leq M(\frac{1}{2^{n+1}}).$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$收敛, 所以,$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})]$ 绝对收敛.

(2)又$S_n = f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2^{n+1}})$,而$\lim_{n\to\infty} S_n$存在, 故, $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2^n})$也存在.

Question 6. (8 marks)

(1) 写出$f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$ 展开成x 的幂级数展开式, 并写出其收敛域;

(2) 积分 $\int_0^1 (e^{x^2} + e^{-x^2})dx$ 与积分 $\int_0^1 (e^{x^3} + e^{-x^3})dx$ 谁大谁小, 并请说明理由.

Solution 6. (8 marks)

(1)由于$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}(-\infty < u < +\infty))$, 则:$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$.

(2) $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!}. \quad (-\infty < x < +\infty)$

故, $\int_0^1 (e^{x^2} + e^{-x^2})dx = 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!}dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(2n)!}$.

同样, $\int_0^1 (e^{x^3} + e^{-x^3})dx = 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n}}{(2n)!}dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6n+1)(2n)!}$.

(3)由于$\frac{1}{(4n+1)(2n)!} > \frac{1}{(6n+1)(2n)!}$, 则: $\int_0^1 (e^{x^2} + e^{-x^2})dx > \int_0^1 (e^{x^3} + e^{-x^3})dx$.

Question 7. (10 marks)

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$满足:$\mathrm{e}^{a_n} = a_n + \mathrm{e}^{b_n}, a_n > 0, n = 1, 2, 3, \cdots$,

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 证明$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$收敛.

Solution 7. (8 marks)

解：$b_n = \ln(e^{a_n} - a_n)$.

$$\text{则}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\ln(e^{a_n} - a_n)}{a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{b_n}{a_n^2} = \frac{\ln(e^{a_n} - a_n)}{a_n^2}$$

$$= \frac{\ln(1 + \frac{1}{2}a_n^2 + 0(a_n^2))}{a_n^2}$$

$$< \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n^2}$$

$$= \frac{1}{2} + o(1)$$

因此可以得到$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$收敛

Question 8. (8 marks)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 的收敛半径及收敛区间, 并讨论收敛区间端点处的敛散性.

Solution 8. (8 marks)

记$a_n=\dfrac{n!}{n^n}$, 则: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}$.

因此, 级数的收敛半径$r=e$; 收敛开区间为$(-e,e)$.

在$x=\pm e$ 处, 级数为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$.

记$u_n=\dfrac{n!e^n}{n^n}$, 则:$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$; 从而 $\{u_n\}$ 单调递增, 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

同样, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n u_n\neq 0$. 故, 级数在$x=\pm e$ 处均发散.

Question 9. (8 marks)

设$z = xf(x+y) + yg(x+y)$, 且f, g 二阶可导, 证明：
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Solution 9. (8 marks)

证明: 由题, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y), \dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(x+y) + f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y) + g'(x+y) = 2g'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$.

因此有

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$= 2[f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)] = 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

从而$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Question 10. (8 marks)

将$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$ 的幂级数, 并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

Solution 10. (10 marks)

(1)由$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$可得,$f'(x)=\dfrac{-2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}.(|x|<\dfrac{1}{2})$

(2)$f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(x)dx+f(0)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}.$

当$x=\pm\dfrac{1}{2}$时, 级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}\cdot\frac{-1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 为收敛的交错级数

因此,$\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}=\dfrac{\pi}{4}-2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}$. 其收敛域为: $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$.

(3) 当$x=\dfrac{1}{2}$ 时,$0=\dfrac{\pi}{4}-2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$

Question 11. (8 marks)

假设我们有一个周期为T的函数$f(x)$, 可以表示为:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

现在我们来求$f(x)$的傅里叶级数展开式。

Solution 11. (10 marks)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)$$

其中,a_0、a_n和b_n分别为傅里叶系数, 可以通过以下公式求得：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

带入$f(x)$的表达式可得：

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

因此,$f(x)$的傅里叶级数展开式为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin(\frac{2n\pi}{T}x)$$

Question 12. (10 marks)

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$a_n > 0$, 极限$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = l$,其中$l$可以是实数或$\infty$,证明下述命题:

(1)若$l > 1$,级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

(2)若$l < 1$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

Solution 12. (10 marks)

证明**:**我们看到形式$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$.很容易去联想到$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$这是我们所熟悉的$Raabc$判别法。我们考虑能否同类似$Raabe$判别法的证明过程来证明题目.

lemma.: 设$s > t > 1, f(x) = 1 + sx - (1+x)^t$则$\exists\delta > 0, \forall 0 < x < \delta, f(x) > 0$恒成立.

lemma 的证明**:**$f(x)$连续可微, 因此$f(0) = 0, f'(0) = s - t > 0$, 故$\exists\delta > 0, \forall 0 < x < \delta, f(x) > 0 \Rightarrow 1 + sx > (1+x)^t$成立.

①$l > 1$时, 取s, t使$l > s > t > 1$, 由$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = l > s > t$及$lemma$有:$\frac{a_n}{a_{n+1}} > e^{\frac{s}{n}} > 1 + \frac{s}{n} > (1 + \frac{1}{n})^t = \frac{(n+1)^t}{n^t} \Rightarrow$ 正项数列$n^t a_n$从某一项开始递减, 因而必有上界, 不妨设$n^t a_n \leq A \Rightarrow a_n \leq \frac{A}{n^t}$由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

②$l < 1$时, 考虑$f(x) = \frac{\ln 1 + x}{x}$,则$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln 1 + x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2} > 0$

令$x = \frac{1}{n}$则$\exists N \in \mathbb{N}, n > N$时,$n\ln 1 + \frac{1}{n} > l$因此$n > N$时,$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow na_n$从某项开始递增, 故有下界$a \Rightarrow a_n > \frac{a}{n}$由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

END OF PAPER