2020-2021 学年秋冬学期高等代数期中模拟考试答案

命题、组织：丹青学业指导中心

一、填空题:

1. 6

因为 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=3|A_3,A_2,A_1|+|-2A_1,3A_2,A_1|=6.$

2. $txyz-yz-tz-ty$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1-tx & -t & -t & t \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & y & 0 \\ 1 & 0 & z \\ 1-tx & -t & -t \end{vmatrix}$$

$$= txyz-yz-tz-ty.$$

3. 4.

4. $a^2(a-2^n).$

先用数学归纳法证明：$A^n=2^{n-1}A,(n\geq 2).$

$$A^n=2^{n-1}aa^T=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$|aE - A^n| = \begin{vmatrix} a-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a-2^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$= a\left[\left(a-2^{n-1}\right)^2 - \left(2^{n-1}\right)^2\right]$$

$$= a^2\left(a-2^n\right)$$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

因为 $AB+E=A^2+B$，所以 $(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$。又 $(A-E)$ 可逆，所以 $B=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

二、计算下述 n 阶行列式 $(n \geq 2)$：

(1) 首先从第 1 列提取公因子 a_1，然后从第 n 行提取公因子 b_n，得

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1b_n \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$
=a_1b_n\begin{vmatrix} 0 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & \cdots & a_1b_n-a_nb_1 \\ 0 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 & \cdots & a_2b_n-a_nb_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3b_n-a_nb_3 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}
$$

$$
=a_1b_n(-1)^{n+1}\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\cdots\left(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}\right)
$$

$$
=(-1)^{n+1}a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}\left(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i\right)
$$

(2) 提示：第 2 行起到第 $n-1$ 行都减去第 n 行，然后将第 2 列以后的各列都加上最后一列，再按第 1 列来展开行列式。

$$
\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\alpha-\beta)^{n-2}((n-2)\beta+\alpha)+(-1)^{n+1}b(-1)^{n}(n-1)a(\alpha-\beta)^{n-2}$$

$$=[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab](\alpha-\beta)^{n-2}$$

三、证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & x & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}
$$

$$
=\cdots=
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & x & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & x & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & x & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}
$$

四、系数行列式为

$$
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1).
$$

当 $b\neq 0, a\neq 1$ 时有唯一解，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{vmatrix}}{b(1-a)} = \frac{1-2b}{b(1-a)},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{b(1-a)} = \frac{1-a}{b(1-a)} = \frac{1}{b},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2b & 4 \end{vmatrix}}{b(1-a)} = \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

当 $b=0$ 时，方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \qquad + x_3 = 3 \\ x_1 \qquad + x_3 = 4 \end{cases}$$

第二、三方程是矛盾的，故无解。

当 $a=1$ 时，方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

这时系数行列式为 0，对其增广矩阵进行初等行变换，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i)$b=\frac{1}{2}$，则 $b-1=-\frac{1}{2}$，可得一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 2-t \\ x_2 = 2 \\ x_3 = t \end{cases}$$

其中 t 为任意数，原方程组有无穷多解。

(ii)$b \neq \frac{1}{2}$，系数矩阵非零的最高阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2b-1 \end{vmatrix} \neq 0$，故秩为 2；而其增广矩阵却有三阶非零子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

秩为 3，此时方程组无解。

五、令 $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，则原方程组可以写成

$$\begin{cases} y + a_1 x_1 = b_1 \\ y + a_2 x_2 = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y + a_n x_n = b_n \end{cases}$$

由此得出

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - y}{a_1} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - y}{a_2} \\ \quad \cdots \\ x_n = \dfrac{b_n - y}{a_n} \end{cases}$$

把这 n 个式子相加，得

$$y = \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right) - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) y.$$

由已知条件可知上式是 y 的一元一次方程，记

$$s = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

解上述一元一次方程得

$$y = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j}.$$

于是

$$x_i = \frac{b_i}{a_i} - \frac{1}{a_i s} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

六、由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 可得 $B = A^{-1}B + 3E$, 所以 $(E - A^{-1})B = 3E$.
再由已知 A^*，可得 $|A^*| = 8 = |A|^3$，所以 $|A| = 2$.
又 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{2}A^*$.

所以 $E - A^{-1} = E - \frac{1}{2}A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

因为 $|E-A^{-1}| \neq 0$，所以 $(E-A^{-1})$ 是可逆的，从而可得

$$B = 3\left(E-A^{-1}\right)^{-1} = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

七、证明：

(1) $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{pmatrix}$，

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |E-AB|.$$

$\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E-BA & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$，

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |E-BA|.$$

所以 $|E-AB| = |E-BA|$，从而 $|E-AB| = 0 \Leftrightarrow |E-BA| = 0$.

(2) 因为 $C(E-AB) = (E-AB)C = E$，所以 $C = ABC + E = CAB + E$.

从而有

$$\begin{aligned} &(E-BA)(E+BCA) \\ &= E - BA + BCA - BABCA \\ &= E + BCA - B(E+ABC)A \\ &= E + BCA - BCA \\ &= E. \end{aligned}$$

所以 $(E-BA)^{-1} = E + BCA = E + B(E-AB)^{-1}A$.

八、证明：

因为 $|A|>0$，$|A||A^T|=|A|^2=1$，故 $|A|=1$.
由已知条件知 $A^{-1}=A^T$，因此

$$|E-A|=|A||A^{-1}-E|=|A||A^T-E|=|(A-E)^T|=|A-E|.$$

但 $|E-A|=(-1)^n|A-E|$，且 n 是奇数，故 $|E-A|=-|E-A|$，所以 $|E-A|=0$，即 $E-A$ 是奇异的。

九、证明：

假设 $A^k=O$，其中 k 是某个正整数。由已知可得 $AB=B(E-A)$，于是 $O=A^kB=B(E-A)^k$.
又因为 $E=E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$，所以 $E-A$ 是可逆矩阵，从而 $B=O$.

up主 丹青学指　　**学指菌QQ号**

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。