

2020-2021 学年秋冬学期微积分期中模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期中考试考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考试。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分分钟后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、用 $\epsilon - N$ 方法证明：(6')

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + \frac{1}{n}} = 1$$

二、求下列极限（每小题 5'）

(1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[e \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - 1 \right]$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

三、(1) $y = \arcsin \sqrt{1-x} + x e^{2x}$, 求 dy (6')

(2) 设 $f(x) = x^3 \ln x$, 求 $f^{(n)}(x)$ ($n \geq 4$) (6')

四、(1) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n^b - (n-1)^b} = 2020$, 求 a, b 的值 (6')

(2) 研究函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^{n+1} - 1}$ 的连续性, 并指出间断点的类型 (6')

五、设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f'(x) = 1$, 证明:
 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续 (10')

六、设数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 满足: $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 有 $a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{n^2}$, 证明:
数列 $\{a_n\}$ 收敛 (8')

七、设 $f(x)$ 在 $[a, a+2b]$ 上连续, 证明: 存在 $\xi \in [a, a+b]$, 使得 (8')

$$f(\xi + b) - f(\xi) = \frac{1}{2}[f(a+2b) - f(a)]$$

八、设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 上可微, 证明: 存在 $\xi \in (1, 2)$ 使得 (8')

$$f(2) - f(1) = \frac{1}{2} \xi^2 f'(\xi)$$

九、设 a, b, c 为三个实数, 证明: 方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个 (8')

十、设 $a_1 > 0$, 令 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, $n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限 (8')

附加题、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0, f(1) = 1, k_1, k_2, \dots, k_n$ 为 n 个正数。
证明: 在 $[0, 1]$ 内存在一组互不相同的点 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i$



up主 丹青学指



学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

演草纸:

答题卡:

答题卡:

答题卡: