2020-2021 学年秋冬学期微积分期中模拟考试答案

命题、组织：丹青学业指导中心

一、

因为 $n \geq 2$ 时，$\sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} > 1$，记 $\sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} = 1 + a_n, a_n > 0, n = 2, 3\cdots$

$\therefore n + \frac{1}{n} = (1+a_n)^n > C_n^2 \cdot a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$

$\therefore 0 < a_n^2 < \frac{2(n+\frac{1}{n})}{n(n-1)} < \frac{2n+2n}{n(n-1)} = \frac{4}{n-1}$

$\therefore 0 < a_n < \frac{2}{\sqrt{n-1}}$

令 $\frac{2}{\sqrt{n-1}} \leq \epsilon$，得 $n \geq \frac{4}{\epsilon^2} + 1$

故可令 $N = [\frac{4}{\epsilon^2}] + 2$

此时对 $n > N$，我们有：

$$\left|\sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} - 1\right| = a_n < \frac{2}{\sqrt{n-1}} < \epsilon$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} = 1$

二、

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n[e(1+\frac{1}{n})^{-n} - 1] &\overset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x(1+x)^{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{e - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{xe} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{-(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}{e} (L^{'}Hospital)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} (L^{'}Hospital) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{n!}{n!} < \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! < \frac{(n-2)\cdot(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} \\
= 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \\
< 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 由夹逼定理可知:

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = 1
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \\
=&\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} \\
=&\exp(\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}) \\
=&\exp(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x})(L^{'}Hospital) \\
=&\exp(-\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2\cos x}) \\
=&e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x})\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}(L^{'}Hospital)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

三、

(1)

$$
\begin{aligned}
\because y&=\arcsin\sqrt{1-x}+x^{e^{2x}}\\
&=\arcsin\sqrt{1-x}+e^{e^{2x}\ln x}\\
\therefore y'&=\frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}+e^{e^{2x}\ln x}(2e^{2x}\ln x+\frac{e^{2x}}{x})\\
\therefore dy&=[\frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}+x^{e^{2x}}(2e^{2x}\ln x+\frac{e^{2x}}{x})]dx
\end{aligned}
$$

(2)

依 Leibinz 公式可得 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

又 $\because (\ln x)^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k},(x^3)^{(k)}=0,k\geq 4$

故 $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 6(n-4)!x^{3-n}.(n\geq 4)$

四、

(1) 由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(n-1,n)$ 使得 $n^b-(n-1)^b=b\cdot\xi^{b-1}[n-(n-1)]=b\cdot\xi^{b-1}$，即 $1<\frac{n}{\xi}<\frac{n}{n-1},\therefore \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\xi}=1$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}\frac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^a}{b\cdot\xi^{b-1}}=\frac{1}{b}\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{\xi})^{b-1}\cdot n^{a-b+1}=\frac{1}{b}\lim_{n\to+\infty}n^{a-b+1}=2020$

$\therefore \begin{cases} 1/b &= 2020 \\ a-b+1 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a &= -2019/2020 \\ b &= 1/2020 \end{cases}$

(2) 易知 $f(x) = \begin{cases} 1 & ,|x|>1 \\ 0 & ,x=1 \\ -1 & ,|x|<1 \\ \text{无意义} & ,x=-1 \end{cases}$ $\therefore 1,-1$是$f(x)$的第一类（跳跃）间断点

五、证明：由 $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)=1$ 可知，$\exists 0<\delta<1, \mathrm{s.t.}\ \forall x\in(0,\delta), |\sqrt{x}f'(x)|<3/2$。对$0<x<y<\delta$，由 Cauthy 中值定理可得，$\exists\xi\in(x,y)\subset(0,\delta), \mathrm{s.t.}$

$\frac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2\sqrt{\xi}f'(\xi)$

$\therefore |f(x)-f(y)| = 2|\sqrt{\xi}f'(\xi)||\sqrt{x}-\sqrt{y}| < 3|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$

因为 $\sqrt{x}$ 在 $(0,\delta]$ 上一致连续，故 $f(x)$ 也在 $(0,\delta]$ 上一致连续

又因为 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，故 $f(x)$ 也在 $[\delta,1]$ 上一致连续

由上可知，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续

六、证明：$\forall n\geq 2,$我们有$a_{n+1}\leq a_n+\frac{1}{n^2}<a_n+\frac{1}{n(n-1)}=a_n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\therefore a_n+\frac{1}{n-1}>a_{n+1}+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}>0$，故数列 $\{a_n+\frac{1}{n-1}\}$ 单调递减有下界。

$\therefore \lim_{n\to+\infty} a_n+\frac{1}{n-1}$ 存在，我们不妨令极限为 A，又因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$

$\therefore \lim_{n\to+\infty} a_n = A$，即数列 $\{a_n\}$ 收敛

七、令 $F(x)=f(x+b)-f(x)-\frac{1}{2}[f(a+2b)-f(a)]$

则 $F(a)=f(a+b)-\frac{1}{2}f(a+2b)-\frac{1}{2}f(a)$

$F(a+b)=-f(a+b)+\frac{1}{2}f(a+2b)+\frac{1}{2}f(a)=-F(a)$

所以由介值定理可得，$\exists\xi\in[a,a+b], \mathrm{s.t.}$

$F(\xi)=f(\xi+b)-f(\xi)-\frac{1}{2}[f(a+2b)-f(a)]=0$

即 $f(\xi+b)-f(\xi)=\frac{1}{2}[f(a+2b)-f(a)]$

八、令 $g(x)=\frac{1}{x}$，由 Cauthy 中值定理，可知 $\exists\xi\in(1,2), \mathrm{s.t.}$

$\frac{f(2)-f(1)}{0.5-1}=\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=-\xi^2f'(\xi)$

即 $f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2f'(\xi)$

九、假设 $e^x=ax^2+bx+c$ 至少有 4 个根，从小到大依次设为

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots$，记 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c, f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$

由罗尔中值定理，$\exists \xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3), \xi_3 \in (x_3, x_4), \text{s.t.}$

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$$

再由罗尔中值定理，$\exists \eta_1 \in (\xi_1, \xi_2), \eta_2 \in (\xi_2, \xi_3), \text{s.t.}$

$$f''(\eta_1) = f''(\eta_2) = 0$$

再由罗尔中值定理，$\exists \zeta \in (\eta_1, \eta_2), \text{s.t.}$

$$f'''(\zeta) = 0$$
$$\therefore 0 = f'''(\zeta) = e^\zeta > 0 \text{ 矛盾}$$

故假设不成立，即 $e^x = ax^2 + bx + c$ 至多有 3 个根

十、由 $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$。易知 $\forall n, a_n > 0, \therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1 \therefore a_n \geq 1, (n \geq 2)$

又 $\because a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n}{a_n}) = \frac{1}{2}(a_n + 1) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n, \therefore a_{n+1} \leq a_n, (n \geq 2)$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，故由单调有界收敛定理可知：数列 $\{a_n\}$ 收敛，设其极限为 a，即 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a(> 0)$

在 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 两端求极限，得到 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 解得：$a = 1$ 故 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

附加题、令 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, 只要证明

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{k_i}{Af'(x_i)} = 1.$$

记 $\frac{k_i}{A} = a_i$, 则

$$0 < a_i < 1, \text{ 且 } a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

因为 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(x) \in C[0,1]$, 对 $a_1 \in (0,1)$, 由连续函数介值定理得

$$\exists b_1 \in (0,1), f(b_1) = a_1.$$

又 $0 < a_1 < a_1 + a_2 < 1$, 由连续函数介值定理得

$$\exists b_2 \in (b_1, 1), f(b_2) = a_1 + a_2.$$

这样可得 $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < b_n = 1$ 使得

$$f(b_i) = a_1 + \cdots + a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

取 $b_0 = 0$, 对 $f(x)$ 在 $[b_{i-1}, b_i](i = 1, 2, \cdots)$ 应用拉格朗日中值定理知存在 $x_i \in (b_{i-1}, b_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \tfrac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = \tfrac{a_i}{b_i - b_{i-1}}$$

即 $\frac{a_i}{f'(x_i)} = b_i - b_{i-1}$ 从而

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{a_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0 = 1$$

up主 丹青学指　　　　**学指菌QQ号**

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。