2020-2021 学年秋冬学期数学分析期中模拟考试解答

命题、组织：丹青学业指导中心

一、

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n\to\infty} sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= sin^2\frac{\pi}{2} = 1.
\end{aligned}$$

(2) 令 $y = x^x$, 取对数得 $lny = xlnx$. 而

$$\lim_{x\to 0^+} xlnx = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.

再令 $z = x^{x^x-1}$, 则 $lnz = (x^x-1)lnx$.

而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(x^x-1)lnx &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\frac{1}{lnx}} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x(lnx+1)}{-\frac{1}{xln^2x}} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} x^x(lnx+1)\cdot xln^2x \\
&= -\lim_{x\to 0^+}(lnx+1)\cdot xln^2x.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}ln^2x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{ln^2x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\frac{1}{x}lnx}{-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}\\ &= -4\lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\\ &= -4\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}\\ &= 8\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\end{aligned}$$

和 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}(lnx+1)=0$, 从而原极限为 1.

二、

(1) 由不等式 $0<sinx<x \quad (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$ 知，$\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0. 由单调有界定理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。若记为 ξ, 则 $\xi\in[0,\frac{\pi}{2})$. 在等式 $x_n=sinx_{n-1}$ 两边取极限可得 $\xi=0$.

(2) 考虑 $nx_n^2=\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$. 由 Stolz 定理，

$$\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\frac{1}{\frac{1}{sin^2x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\frac{x_{n-1}^2\cdot sin^2x_{n-1}}{x_{n-1}^2-sin^2x_{n-1}}$$

将其换成连续变量 t, 由洛必达 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2sin^2t}{t^2-sin^2t}=3$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$

三、

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>a$ 当 $x^{'},x^{''}>\Delta$ 时有

$$|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$$

由 Cantor 定理，f 在 $[a,\Delta+1]$ 上一致连续，故对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 当 $x^{'},x^{''}\in[a,\Delta+1],|x^{'}-x^{''}|<\delta_1$ 时有

$$|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$$

令 $\delta=min\{1,\delta_1\}$, 则 $x^{'},x^{''}>a,|x^{'}-x^{''}|<\delta$ 时, $x^{'},x^{''}$ 要么同属于 $[a,\Delta+1]$, 要么同属于 $(\Delta,+\infty)$. 从而总有 $|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上

一致连续。

注：如下证明是错误的：首先利用同上方式证明 f 在 $[\Delta, +\infty)$ 上一致连续，然后利用 Cantor 定理，f 在 $[a, \Delta)$ 上一致连续, 从而 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。其错误在于 Δ 与 ε 有关，不能由此得到 f 在 $[\Delta, +\infty)$ 上一致连续。

四、

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [0, +\infty)$ 只要 $|x' - x''| < \delta$ 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

对固定的 $\delta > 0$, 取 $k > \frac{1}{\delta}$ 且为正整数，将 $[0,1]$ 区间 k 等分。记分点 $x_i = \frac{i}{k}(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则每个小区间的长度 $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{k} < \delta$. 由已知条件，对每个 $x_i = \frac{i}{k}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_i + n) = 0$. 故对上述 $\varepsilon > 0, \exists N_i > 0$, 当 $n > N_i$ 时，有 $|f(x_i + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $N = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{N_i\} > 0$, 则当 $n > N$ 时，有

$$|f(x_i + n)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

$\forall x > N$, 记 $n = [x] \geqslant N$, 因为 $x - n \in [0, 1)$, 故 $\exists i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 使得 $|(x - n) - x_i| < \delta$, 即 $|x - (n + x_i)| < \delta$, 从而

$$|f(x) - f(n + x_i)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

故有

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n + x_i)| + |f(n + x_i)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。

五、

由于

$\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)\left(1 + \frac{2}{n^x}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^x}\right)\right] = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^x}\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^x} = \frac{1}{n^x}\frac{n(n+1)}{2}$

且

$\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^x}\right) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^x} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^x}\right)^2\right] = \frac{1}{n^x}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2x}}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

故当 $x = 2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} ln[(1+\tfrac{1}{n^2})(1+\tfrac{2}{n^2})\cdots(1+\tfrac{n}{n^2})] = \tfrac{1}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n^2})(1+\tfrac{2}{n^2})\cdots(1+\tfrac{n}{n^2}) = e^{\frac{1}{2}}.$$

当 $x > 2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n^x})(1+\tfrac{2}{n^x})\cdots(1+\tfrac{n}{n^x}) = e^0 = 1.$$

六、

当 $x \neq 0$ 时，$f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ 其中 $p_n(\frac{1}{x})$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的 $3n$ 次多项式（可以用数学归纳法证明）．容易证明 $f'(0) = 0$, 假设 $f^{(n-1)}(0) = 0$ 则有

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{p_{n-1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{tp_{n-1}(t)}{e^{t^2}} = 0.
\end{aligned}$$

七、

记 $F(x) = f(x) - x$, 由 $F(\frac{1}{2}) > 0, F(1) < 0$ 及连续函数介值定理得存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

令 $G(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$, 则 $G(0) = f(0) = 0, G(\xi) = 0$, 由 Rolle 定理知存在 $\eta \in (0, \xi)$ 使得 $G'(\eta) = 0$, 即 $f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$.

八、

令 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, 只要证明

$$\sum_{i=1}^{n}\tfrac{k_i}{Af'(x_i)} = 1.$$

记 $\frac{k_i}{A} = a_i$, 则

$$0 < a_i < 1, \text{ 且 } a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

因为 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(x) \in C[0,1]$, 对 $a_1 \in (0,1)$, 由连续函数介值定理得

$$\exists b_1 \in (0,1), f(b_1) = a_1.$$

又 $0 < a_1 < a_1 + a_2 < 1$, 由连续函数介值定理得

$$\exists b_2 \in (b_1,1), f(b_2) = a_1 + a_2.$$

这样可得 $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < b_n = 1$ 使得

$$f(b_i) = a_1 + \cdots + a_i, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

取 $b_0 = 0$, 对 $f(x)$ 在 $[b_{i-1}, b_i](i = 1,2,\cdots)$ 应用拉格朗日中值定理知存在 $x_i \in (b_{i-1}, b_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = \frac{a_i}{b_i - b_{i-1}}$$

即 $\frac{a_i}{f'(x_i)} = b_i - b_{i-1}$ 从而

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0 = 1$$

九、

(1) 由条件知 f 和 f' 是单调递增的正函数，因此 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ 都存在。由拉格朗日中值定理，对任意 x 存在 $\theta_x \in (0,1)$ 使得 $f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta_x) > f'(x) > 0$, 式子左边当 $x \to -\infty$ 时极限为 0，因此有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$

(2) 设 $a = \sqrt{c}$. 则 $a > 0, \frac{c}{-a} = -a$. 由条件有

$$f'(x) - af'(x) \leq -af'(x) + cf(x) = -a\left(f'(x) - af(x)\right)$$

说明函数 $e^{ax}(f'(x) - af(x))$ 是单调递减的。注意到函数当 $x \to -\infty$ 时极限为 0，因此有 $f'(x) - af(x) \leqslant 0$. 即 $f'(x) \leqslant af(x)$. 常数 a 是最佳的，这是因为对函数 $f(x) = e^{ax}$ 有 $f''(x) = cf(x)$.

十、

由中值定理，存在 $s \in (ln(1+x), x)$, 使得

$$f(x) - f(\ln(1+x)) = f'(s)[x - \ln(1+x)]$$

于是

$$\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{f'(s)}{s}\cdot\frac{s}{x}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

又因为

$$\frac{ln(1+x)}{x}<\frac{s}{x}<1.$$

所以，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$, 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{s}{x}=1$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(s)}{s}\cdot\frac{s}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(s)}{s}$$

再由 $f'(0)=0,f''(0)$ 存在，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{f'(s)-f'(0)}{s}=f''(0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0)$$

up主 丹青学指　　学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。