

2020-2021 学年秋冬学期数学分析期中模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期中考试考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考试。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分后后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、求下列极限（每小题 5'）

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x - 1}$$

二、对数列 $x_0 = a, 0 < a < \frac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ ，求证

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; (3') (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$; (7')

三、证明：若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 有限，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。(10')

四、设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，且任意 $x \geq 0$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$ (n 为正整数)。证明： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (10')

五、利用不等式 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x (x > 0)$ 。求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^x})(1 + \frac{2}{n^x}) \cdots (1 + \frac{n}{n^x}) (x \geq 2). \quad (10')$$

六、证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). (10')

七、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$.

证明：对任意 λ ，存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 (10')

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1.$$

八、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微， $f(0) = 0, f(1) = 1, k_1, k_2, \dots, k_n$ 为 n 个正数。

证明：在 $[0, 1]$ 内存在一组互不相同的点 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i$ (10')

九、设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有二阶导函数，且 $f(x), f'(x), f''(x)$ 均大于零，假设存在正数 c ，使得 $f''(x) \leq cf(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立。证明：

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$; (3')

(2) 存在正数 a 使得 $f'(x) \leq af(x)$ ，并求使得不等式成立的最小常数 a 。(7')

十、设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有连续一阶导数， $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在。

证明： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{1}{2}f''(0)$ 。(10')



up主 丹青学指



学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

演草纸:

答题卡:

答题卡:

答题卡: