

2020-2021 学年秋冬学期高等代数期中模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期中考试考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考试。下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分后能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、填空题：(20')

1. 设 A 为 3×3 矩阵， $|A| = -2$ ，把 A 按列分块为 (A_1, A_2, A_3) ，其中 $A_j (j = 1, 2, 3)$ 是 A 的第 j 列，则 $|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 求行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 计算该矩阵的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 A, B 为 3 阶矩阵, E 是 3 阶单位阵, 满足 $AB + E = A^2 + B$, 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算下述 n 阶行列式 ($n \geq 2$): (10')

(1)

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$$

三、设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 试证明: (10')

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

四、讨论 a, b 取什么值时该方程组有解, 并求解: (10')

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

五、解下述线性方程组: (10')

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$$

其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$.

六、设矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} +$

$3E$, 其中 E 是 4 阶单位阵, 求矩阵 B . (10')

七、设 A, B 都是 n 阶矩阵, E 是 n 阶单位阵. (10')

(1) 证明: $|E - AB| = 0$ 的充要条件是 $|E - BA| = 0$;

(2) 若 $E - AB$ 可逆, 且 $C = (E - AB)^{-1}$, 求 $(E - BA)^{-1}$.

八、设 A 是奇数阶矩阵, $|A| > 0$, 又 $AA^T = E$, 其中 E 是 n 阶单位阵,

证明: $E - A$ 是奇异的. (10')

九、设 A 为 n 阶幂零矩阵, B 为 n 阶矩阵, 使得 $AB + BA = B$, 求证:

$B = O$. (10')



up主 丹青学指



学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

演草纸:

答题卡:

答题卡:

答题卡: