2020-2021 学年秋冬学期高等数学期中模拟考试答案

命题、组织：丹青学业指导中心

一、选择题

(1)B　　$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

(2)A

(3)C

(4)B　　求导易知

(5)C　　$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.5, \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{3}$

(6)B　　由夹逼定理易得

(7)B　　取 $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 可知

(8)A　　取 $x_n = n\pi$ 和 $x_n = (2n+1/2)\pi$

(9)D

(10)C

二、填空题

(1)$f(g(x)) = \begin{cases} 2, & \text{当}|x| \leqslant 2 \\ 0, & \text{当}|x| > 2 \end{cases}$

$g(f(x)) \equiv 0$, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$

(2)$-\frac{3}{2}$　　$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{-3x} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

(3)$\frac{1}{2} f'(\arctan\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$　　链式求导法则

(4)0

(5)2

(6)$y = x-1$　　对曲线求导: $y' = \ln x + 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \therefore y = x-1$

(7)2 $\qquad (\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}}$

(8)1 $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(9)-5

(10)$1+y^{-2}$ $\qquad \therefore 1-y'+\frac{y'}{1+y^2}=0 \Rightarrow y'=1+y^{-2}$

三、解答题

1、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}(L^{'}Hospital)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{1+\ln x+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2、$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Longrightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=a+b+2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=a=b$

$\Rightarrow a=-1,b=-1$

$f'(x)=\begin{cases}-\cos x & x<0\\ -e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$

3、$y=e^{\frac{1}{2}x^2},y'=xe^{\frac{1}{2}x^2},y''=e^{\frac{1}{2}x^2}+x^2e^{\frac{1}{2}x^2}=(1+x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}>0$

$\therefore x=0$ 为 $y=e^{\frac{1}{2}x^2}$ 的极小值点,

$\therefore y$ 在 $(-\infty,0)\searrow,(0,+\infty)\nearrow$

$\therefore y$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凹函数，并无拐点。

4、令 $g(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2 \Rightarrow g'(x)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2$ 且 $g'(1)=0$

$g''=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}$ 且 $g''(1)=2>0$

$g'''=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$ 且 $g'''(1)=0 \Rightarrow g''(x)$ 在 $(0,1)\searrow,(1,+\infty)\nearrow$

$\Rightarrow g''(x)\geq g''(1)=2>0 \Rightarrow g'(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$

$\Rightarrow g(x)$ 在 $(0,1)\searrow,(1,+\infty)\nearrow$

$\therefore g(x)\geq g(1)=0$

即 $\quad (x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2 \qquad ,\forall x>0$

5、设切点为 $(x_0,\frac{1}{4}-x_0^2).(0<x_0<\frac{1}{2})$

则切线为 $y-(\frac{1}{4}-x_0^2)=-2x_0(x-x_0)$

与坐标轴交于 $(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{8x_0},0),(0,x_0^2+\frac{1}{4})$

$S(x_0)=\frac{1}{2}(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{8x_0})(x_0^2+\frac{1}{4})$

$\therefore S'(x_0)=0\Rightarrow x_0=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore S(x)_{min}=S(\frac{\sqrt{3}}{6})=\frac{\sqrt{3}}{18}$

6、设$F(x)=f(x)-x,F(x)$ 在$[0,1]$ 上连续在$(0,1)$ 可导，因$f(0)=f(1)=0$

有 $F(0)=f(0)-0=0,F(1)=f(1)-1=-1$

又由 $f(\frac{1}{2})=1$，知 $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，在 $[\frac{1}{2},1]$ 上对 $F(x)$ 使用介值定理，

可知在 $(\frac{1}{2},1)$ 上至少存在一点 η，使得 $F(\eta)=0$ 又因为 $F(0)=F(\eta)=0$，

由罗尔中值定理可得，至少存在一个点 $\xi\in(0,\eta),\mathrm{s.t.}\,F'(\xi)=0$

$\Rightarrow f'(\xi)=1$ 得证

up主 丹青学指　　学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。