2020-2021 学年秋冬学期数学分析期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

一、

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n[e^2-(1+\frac{1}{n})^{2n}] &= \mathrm{e}^2\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot \mathrm{e}^{-2}\right]\\ &= \mathrm{e}^2\lim_{n\to\infty}\left[1-\mathrm{e}^{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2}\right]\\ &= \mathrm{e}^2\lim_{n\to\infty}\left[2-2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= 2\mathrm{e}^2\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

(2)

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\right)\left(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}\right)$$

这里的和式, 可看成函数 $\sin x$ 在 $[1,b]$ 上按分划

$$1=b^{\frac{0}{n}}<b^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{2}{n}}<\cdots<b^{\frac{n}{n}}=b$$

所作的积分和. 其中 $\Delta x_i=b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}$ 为小区间 $\left[b^{\frac{i}{n}},b^{\frac{i+1}{n}}\right]$ 的长度. 最大区间长度

$$\lambda:0\leqslant\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\leqslant b\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\to 0$$

$\xi_i=b^{\frac{2i+1}{2n}}\in\left[b^{\frac{i}{n}},b^{\frac{i+1}{n}}\right]$ 为小区间二端点的比例中项. 因此

$$\text{原极限}=\int_1^b\sin x\ \mathrm{d}x=\cos 1-\cos b$$

二、

因为 $f(x)$ 递减且连续, 由积分中值定理得

$$
\begin{aligned}
d_{n+1}-d_n &= \left[\sum_{k=1}^{n+1} f(k)-\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\right]-\left[\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = f(n+1)-f(\xi) \leqslant 0, \quad \xi \in (n, n+1)
\end{aligned}
$$

即 $\{d_n\}$ 单调递减. 又因为

$$
\begin{aligned}
d_n &= f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\left[\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \left(f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right)+\cdots+\left(f(n-1)-\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n)>0
\end{aligned}
$$

所以 $\{d_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\{d_n\}$ 收敛.

三、

设 f 为 E 上一致连续实值函数，$\{x_n\} \subset E$ 为柯西数列。对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得若 $x', x'' \in E$ 以及 $|x'-x''|<\delta$ 时, 则

$$
\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon
$$

但对 $\delta>0$, 存在 n_0 使 $m, n \geqslant n_0, |x_m-x_n|<\delta$ 时, 有

$$
\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)\right|<\varepsilon
$$

即 $\{f\left(x_n\right)\}$ 为柯西序列.

现假设函数 f 在有界集 E 上不一致连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $\delta_n>0$, 存在 E 内的点 x_n', x_n'' 使得 $|x_n'-x_n''|<\delta_n$, 但 $\left|f\left(x_n'\right)-f\left(x_n''\right)\right| \geqslant \varepsilon_0$. 因为 E 有界, 可以从 $\{x_n'\}$ 中取出一个收敛的子数列, 即 $\left\{x_{n_k}'\right\}$, 那么 ,$\left\{x_{n_k}'\right\}$ 为柯西数列, 不妨设其极限为 x_0. 同理, 存在柯西数列 $\left\{x_{n_k}''\right\}$. 由于 $\left|x_{n_k}''-x_0\right| \leqslant \left|x_{n_i}''-x_{n_k}'\right|+\left|x_{n_k}'-x_0\right|$, 所以 $\left\{x_{\pi_k}''\right\}$ 的极限也为 x_0.

将 $\left\{x_{n_k}'\right\}$ 与 $\left\{x_{n_k}''\right\}$ 按 $x_{n_1}', x_{n_1}'', x_{n_2}', x_{n_2}'', \cdots$ 的方式排列, 得到一个新的

柯西数列，记为 $\{x_n\}$. 由假设，$\{f(x_k)\}$ 也是一个柯西数列, 因此, 对任意 $\varepsilon_0>0$, 存在 k_0, 使得 $k,k'\geqslant k_0$ 时，$|f(x_k)-f(x_{k'})|<\varepsilon_0$. 但另一方面

$$|f(x_{2k_0+1})-f(x_{2k_0})|=\left|f\left(x'_{n_{k_0}}\right)-f\left(x''_{n_{k_0}}\right)\right|\geqslant\varepsilon_0$$

矛盾. 所以 f 在有界集 E 上为一致连续的.

四、

由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\tfrac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2=f(a)+\tfrac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,\quad \xi_1\in(a,x)\\
f(x)&=f(b)+f'(b)(x-b)+\tfrac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2=f(b)+\tfrac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,\quad \xi_2\in(b,x)
\end{aligned}$$

在上式中取 $x=\frac{a+b}{2}$, 并相减得

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{8}(b-a)^2\left[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right],\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$$

从而

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\left[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right]\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2\max\left\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\right\}$$

记 $|f''(\xi)|:=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$, 即得结论成立.

五、

不存在，事实上由积分中值定理. 因为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\xi),\quad \xi\in[0,1],\qquad 而 f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$|f(x)|\leqslant|f(\xi)|+\int_\xi^x|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

六、

因为 $f(x)$ 在 [-1,1] 上可积, 所以 $f(x)$ 在 [-1,1] 上有界, 设界为 M, 即 $|f(x)|\leqslant$

$M, \forall x \in [-1,1]$. 又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$$

通过计算易知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n}{2}\Phi_n(x)\mathrm{d}x=1,$$

因此, 欲证结论成立, 只需证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n}{2}\Phi_n(x)(f(x)-f(0))\mathrm{d}x=0$$

为此, 将积分分为三段进行估计:

$$\int_{-1}^{1}\frac{n}{2}\Phi_n(x)(f(x)-f(0))\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{1}=I_1+I_2+I_3$$

而

$$\begin{aligned}
&|I_1|\leqslant 2M\textstyle\int_{-1}^{-\delta}\frac{n}{2}\mathrm{e}^{nx}\ \mathrm{d}x=M\left(\mathrm{e}^{-n\delta}-\mathrm{e}^{-n}\right)\to 0(n\to\infty)\\
&|I_3|\leqslant 2M\textstyle\int_{\delta}^{1}\frac{n}{2}(1-x)^n\ \mathrm{d}x=\frac{nM}{(n+1)}(1-\delta)^{n+1}\to 0(n\to\infty)\\
&|I_2|\leqslant \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\frac{n}{2}\Phi_n(x)\mathrm{d}x\\
&\qquad=\varepsilon\left[\int_{-\delta}^{0}\frac{n}{2}\mathrm{e}^{nx}\ \mathrm{d}x+\int_{0}^{\delta}\frac{n}{2}(1-x)^n\ \mathrm{d}x\right]\\
&\qquad=\varepsilon\left[\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-n\delta}\right)-\frac{n}{2(n+1)}\left((1-\delta)^{n+1}-1\right)\right]\to\varepsilon(n\to\infty)
\end{aligned}$$

综上可知, 原结论成立.

七、

由导数的定义, 有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}\cos\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

由分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x \cos\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t &= -\frac{1}{x}\int_0^x t^2\ \mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)\\ &= -\frac{1}{x}\left(t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x - 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\right)\\ &= -x\sin\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

对上式右端的第二项, 使用洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$$

从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\left(-x\sin\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\right)=0$$

八、

记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则有 $F(x)\geqslant 0, F(0)=0, F'(x)=f(x)\geqslant 0$, 且

$$F'^2(x)\leqslant 1+2F(x)\Longrightarrow \frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}}\leqslant 1$$

即

$$\begin{cases}(\sqrt{1+2F(x)})'\leqslant 1\\ F(0)=0\end{cases}\Rightarrow \sqrt{1+2F(x)}-\sqrt{1+2F(0)}\leqslant x\Longrightarrow \sqrt{1+2F(x)}\leqslant 1+x$$

故由已知条件及上式得

$$f^2(x)\leqslant 1+2F(x)\leqslant (1+x)^2\Longrightarrow f(x)\leqslant 1+x,\quad x\in[0,1]$$

九、

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$, 所以

$$f(2x)-f(x)=Ax+o(x)$$

从而

$$\begin{cases} f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=A\frac{x}{2}+o\left(\frac{x}{2}\right) \\ f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)=A\frac{x}{2^2}+o\left(\frac{x}{2^2}\right) \\ \cdots\cdots \\ f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=A\frac{x}{2^{n+1}}+o\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right). \end{cases}$$

这样

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=Ax\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=1}^{n+1}o\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 对上式两边令 $n\to\infty$, 得 $f(x)-f(0)=Ax+o(x)$, 故

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

十、

不妨设 $f(x)$ 单调递减否则考虑 $-f(x)$, 由 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛可知 $f(x)\geqslant 0$.
对任意 $\varepsilon>0$, 由 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛知存在 $A>0$ 使得

$$0\leqslant\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon\Longrightarrow\left|\int_A^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\ \mathrm{d}x\right|\leqslant\int_A^{+\infty}|f(x)\sin\lambda x|\mathrm{d}x\leqslant\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

由第二积分中值定理得

$$|\int_a^A f(x)\sin\lambda x\ \mathrm{d}x|=|f(a)\int_a^{\xi}\sin\lambda x\ \mathrm{d}x+f(A)\int_{\xi}^{A}\sin\lambda x\ \mathrm{d}x|$$

$$\begin{aligned}\leqslant\left|f(a)\int_a^{\xi}\sin\lambda x\ \mathrm{d}x\right|+\left|f(A)\int_{\xi}^{A}\sin\lambda x\ \mathrm{d}x\right|&=\left|\frac{f(a)}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda\xi}\sin t\ \mathrm{d}t\right|+\left|\frac{f(A)}{\lambda}\int_{\lambda\xi}^{\lambda A}\sin t\ \mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{2}{|\lambda|}[f(a)+f(A)]\end{aligned}$$

所以, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Lambda > 0$, 当 $\lambda > \Lambda$ 时, 有

$$\left|\int_a^A f(x)\sin\lambda x \ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}[f(a)+f(A)] < \varepsilon$$

此时, 有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\sin\lambda x \ \mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin\lambda x \ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^A f(x)\sin\lambda x \ \mathrm{d}x\right| < 2\varepsilon$$