2020-2021 学年秋冬学期线性代数期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

一、证明：归纳法。

$n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_0.$$

假设对上述形式的 $n-1$ 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-2} \end{vmatrix}=x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,$$

现在考虑上述形式的 n 阶行列式，按第一行展开，得：

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}a_0\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\left(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1\right)+(-1)^{1+n}a_0(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

根据数学归纳法原理，此命题对一切自然数 $n\geq 2$ 都成立。

二、解:

先由 A^* 来确定 $|A|$. 由题意知 A^{-1} 存在，有 $A^*=|A|A^{-1}$，得 $|A^*|=|A|^4|A^{-1}|=|A|^3$，而 $|A^*|=8$，故 $|A|=2$. 再简化所给矩阵方程:

$$\begin{aligned}&ABA^{-1}=BA^{-1}+3E\\ \Rightarrow&(A-E)BA^{-1}=3E\\ \Rightarrow&(A-E)B=3A\\ \Rightarrow&\left(E-A^{-1}\right)B=3E.\end{aligned}$$

由 $|A|=2$ 知 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\operatorname{diag}(1,1,1,8)=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},4\right)$，且

$$E-A^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-3\right).$$

得

$$\left(E-A^{-1}\right)^{-1}=\operatorname{diag}\left(2,2,2,-\frac{1}{3}\right).$$

于是

$$B=3\left(E-A^{-1}\right)^{-1}=3\operatorname{diag}\left(2,2,2,-\frac{1}{3}\right)=\operatorname{diag}(6,6,6,-1).$$

三、解:

由于系数矩阵是方阵，其行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

当 $|A|\neq 0$ 时，即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时，方程组有唯一解。

当 $\lambda=10$ 时，增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可见 $r(A)=2, r(\overline{A})=3, r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解。

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $r(A)=r(\overline{A})=1$，方程组有无穷多解，且其通解为

$$x=c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

四、解:

设 B 按列分块为 $B=(b_1, b_2)$. 因为 $r(B)=2$，所以 b_1, b_2 线性无关。

又因为 $AB=0 \Rightarrow A(b_1,b_2)=(0,0) \Rightarrow Ab_1=0 \text{且} Ab_2=0$，即 b_1, b_2 是方程 $Ax=0$ 的解；并且该方程系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$. 于是可知 b_1, b_2 是方程的一个基础解系。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} x_2=5x_1+2x_4 \\ x_3=8x_1+x_4 \end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到此方程的一个基础解系为

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，令

$$B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

满足题目要求。

五、解:

（1）设 λ 为 A 的特征值，由已知可得 $\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2或\lambda = 0.$

因为 A 是对阵矩阵，故 A 必相似于对角阵 Λ，又因为 $r(A) = 2$，所以 $r(\Lambda) = 2$，于是 Λ 的对角元素中恰好有两个 -2 和一个 0. 从而，A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0.$

（2）注意到对任意的 k，$A + kE$ 仍是对称矩阵，故只需令 $A + kE$ 的特征值全为正即可。

因为 $A + kE$ 的特征值为 $-2 + k, -2 + k, k$，所以当 $k > 2$ 时，$A + kE$ 是正定矩阵。

六、解:

（1）显然有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

所以过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

（2）设向量在后一个基 $\{\alpha_i\}$ 下的坐标为 $(x_1', x_2', x_3', x_4')^T$, 则由坐标变换公式，有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

（3）设向量 y 在两个基下有相同的坐标 $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, 由坐标变换公式，并仍记坐标向量 $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ 为 y，则

$$y = P^{-1}y$$

即 $(P-E)y = \mathbf{0}$. 易求得此齐次线性方程系数矩阵的秩 $r(P-E) = 3$，从而解空间的维数等于 1，且 $\xi = (1, 1, 1, -1)^T$ 为它的一个基础解系。故所求向量为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数。}$$

七、解:

（1）由已知，有

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{pmatrix}.$$

又因为 $r(A)=r(f)=2$，可知 $|A|=(a+1)^2(a^2+3)=0$，解得 $a=-1$.

（2）由（1）知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0.$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

由 $(0E-A)x=0$，得 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T$.

由 $(2E-A)x=0$，得 $\alpha_2=(-1,1,0)^T$.

由 $(6E-A)x=0$，得 $\alpha_3=(1,1,2)^T$.

由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交，故只需单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则正交变换为 $x=Qy$，标准型为 $2y_1^2+6y_3^2$，故所求曲面方程为 $2y_1^2+6y_3^2=2$，即 $y_1^2+3y_3^2=1$.

（3）对于 $f=2y_1^2+6y_3^2$，令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=\sqrt{2}y_2 \\ z_3=\sqrt{6}y_3 \end{cases}$，即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned} x=Qy &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = Pz. \end{aligned}$$

规范型为 $z_2^2+z_3^2$.

八、证明:

假设 $A^k=O$，其中 k 是某个正整数。由已知可得 $AB=B(E-A)$，于是 $O=A^kB=B(E-A)^k$.

又因为 $E=E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$，所以 $E-A$ 是可逆矩阵，从而 $B=O$.

九、证明:

（1）反证法。假设 $E-S$ 是不可逆的，则存在 n 维非零实列向量 x，使得 $(E-S)x=0$，即 $Sx=x$.

因为 S 是实反对称矩阵，所以 $x^TAx=(x^TAx)^T=-x^TAx$，即 $x^TAx=0$.

设 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，其中 a_i 都是实数且不全为零，则

$$0=x^TAx=x^Tx=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

从而 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，即 $x=0$，与已知矛盾。因此假设不成立，$E-S$ 是可逆矩阵。

（2）注意到 $(A+S)^T(A+S)=A^TA+A^TS+S^TA+S^TS=A^TA+(AS-SA)+S^TS=A^TA+S^TS$，其中 A^TA 是正定阵，S^TS 是半正定阵，故 $(A+S)^T(A+S)$ 仍是正定阵，从而 $A+S$ 是可逆矩阵。