2020-2021 学年秋冬学期微积分期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

欢迎大家参加期末模拟考，下面是考试须知:

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、计算下列极限（4*5'=20'）

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{4}\cdots\cos\dfrac{1}{2^n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^\alpha\ln x\right)$， 其中 $\alpha\geq 0$

二、计算下列不定积分（2*4'=8'）

(1) $\displaystyle\int\frac{\ln\left(e^x+2\right)}{e^x}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

三、计算下列导数（2*4'=8'）

(1) $y=(\arcsin x)^2$，求 $y^{(n)}(0)$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}dt$

四、已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有一阶导数，且满足条件

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{e^{x^2}\sin x}{x^2}\right)=1$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶带皮亚诺型余项的泰勒公式。(8')

五、已知对任意自然数 n, 有 $u_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p u_n}{1-\cos\frac{\pi}{n}}=1$ 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。(8')

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导, 且

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\ \mathrm{d}x=0$$

证明: 存在两个不同的 $\xi_1,\xi_2\in 0,\pi)$, 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$ (8')

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{n+1}x^n$ 的收敛域及和函数。(8')

八、设 $f(x)$ 在 [0,1] 上有二阶导数. 且 $f(1)=0$. 方程 $f(x)=0$ 在 (0,1) 内有实根 x_0, 证明: (8')

(I) 存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, 使得 $\xi_1 f'(\xi_1)+f(\xi_1)=\xi_2 f'(\xi_2)+f(\xi_2)=0$;

(II) 若 $f(0)<0$, 且 $\forall x\in(x_0,1)$, 有 $f''(x)>0$, 则存在一点 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)=0$.

九、已知曲线段 $L: y=\ln x(1\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$, 有界区域 D 由 L 与 x 轴及直线 $x=\sqrt{3}$ 围成。(8')

(I) 求 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积;

(II) 求曲线段 L 的长。

十、已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x},\quad x_1=1,\quad x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$ (9')

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

(III) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

十一、是否存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$, 满足 $f(f(x))=e^{-x}$, 请证明你的结论。(7')

答题卡:

答题卡:

答题卡: