

# 2020-2021 学年秋冬学期线性代数期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

欢迎大家参加期末模拟考，下面是考试须知：

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分后方能交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、证明下列  $n$  阶行列式 ( $n \geq 2$ ): (10')

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

二、已知矩阵  $A$  的伴随阵  $A^* = \text{diag}(1, 1, 1, 8)$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 求  $B$ . (10')

三、设

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 & -2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 & -4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 & +(5-\lambda)x_3 = -(\lambda+1) \end{cases}$$

问  $\lambda$  为何值时, 此方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。(10')

四、设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ , 求一个  $4 \times 2$  矩阵  $B$ , 使  $AB = O$ , 且  $r(B) = 2$ 。(10')

五、设  $A$  为 3 阶对称阵,  $A$  的秩  $r(A) = 2$ , 且满足条件  $A^3 + 2A^2 = O$ 。(15')

- (1) 求  $A$  的全部特征值;
- (2) 当  $k$  为何值时,  $A + kE$  为正定矩阵。

六、在  $\mathbb{R}^4$  中取两个基 (15')

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0, 0)^T \\ e_2 = (0, 1, 0, 0)^T \\ e_3 = (0, 0, 1, 0)^T \\ e_4 = (0, 0, 0, 1)^T \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = (2, 1, -1, 1)^T \\ \alpha_2 = (0, 3, 1, 0)^T \\ \alpha_3 = (5, 3, 2, 1)^T \\ \alpha_4 = (6, 6, 1, 3)^T \end{cases}$$

- (1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵;
- (2) 求向量  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  在后一个基下的坐标;
- (3) 求在两个基下有相同坐标的向量。

七、设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = 2x_1^2 + (1+a^2)x_2^2 + (3+a^2)x_3^2 + 2(1-a)x_1x_3 + 2(1-a)x_2x_3$  的秩为 2,  $A^T = A$ 。(15')

- (1) 求  $a$  的值;
- (2) 求  $x^T Ax = 2$  在正交变换  $x = Qy$  下的曲面方程;
- (3) 求一个可逆线性变换  $x = Pz$  将二次型  $f$  化为规范型。

八、设  $A$  为  $n$  阶幂零矩阵,  $B$  为  $n$  阶矩阵, 使得  $AB + BA = B$ , 求证:

$$B = O. (7')$$

九、设  $A$  是  $n$  阶可逆实对称矩阵,  $S$  为  $n$  阶实反对称矩阵且  $AS = SA$ , 求证: (8')

(1)  $E - S$  是可逆的;

(2)  $A + S$  是可逆的。

答题卡:

答题卡:

答题卡: