2020-2021 学年秋冬学期高等代数期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

一、解：将行列式升阶为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

将第一行拆开, 得

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

后面一个行列式的第一行提出公因子 -1 后是一个关于 $1, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 Vandermonde 行列式, 从而可得

$$|A| = \left(2x_1x_2\cdots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\right) \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

二、证明:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-BA \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一行左乘以B加到第二行}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & I-BA \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一列加到第二列}} \begin{pmatrix} A & A \\ BA & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行左乘以-A加到第一行}} \begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ BA & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二列右乘以-BA加到第一列}} \begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

以上变换都是初等变换，均保持秩不变，从而等式成立。

三、证明：（1）当 $\lambda \neq 0$ 时，考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_m - AB & A \\ O & I_n \end{vmatrix} = |\lambda I_m - AB|.$$

又

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \lambda^{m-n} \begin{vmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{vmatrix} = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|.$$

所以 $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$.

当 $\lambda = 0$ 时，若 $m > n$，因为 $r(AB) < m$，所以 $|-AB| = 0$，结论成立；若 $m = n$，显然结论也成立。

（2）设 $A = I_n - 2\alpha^T\alpha$，由（1）可得

$$|\lambda I_n - A| = \left|(\lambda-1)I_n + 2\alpha^T\alpha\right| = (\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1+2) = (\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1).$$

所以矩阵 A 的特征值为 -1 和 1.

四、证明：（1）如果 λ_0 是正交矩阵 A 的一个特征值，那么在 $\mathbb{R}^n$ 中存在

$\alpha \neq 0$, 使得 $A\alpha = \lambda_0 \alpha$. 该式两边取转置得，$\alpha^T \mathrm{A}^T = \lambda_0 \alpha^T$. 两式相乘有

$$\left(\alpha^T A^T\right)(A\alpha) = \left(\lambda_0 \alpha^T\right)(\lambda_0 \alpha).$$

由此可得，$\alpha^T \alpha = \lambda_0^2 \alpha^T \alpha$, 即 $\left(\lambda_0^2 - 1\right) \alpha^T \alpha = 0$, 由于 $\alpha \neq 0$, 因此 $\alpha^T \alpha \neq 0$. 从而 $\lambda_0^2 - 1 = 0$. 于是 $\lambda_0 = \pm 1$.

（2）如果正交矩阵 A 的行列式 $|A| = -1$, 那么

$$|-I-A| = \left|A\left(-A^T - I\right)\right| = |A| \left|(-A-I)^T\right| = -|-I-A|.$$

于是 $2|-I-A| = 0$. 从而 $|-I-A| = 0$. 因此 -1 是 A 的一个特征值。

（3）如果 $|A| = 1$, 且 n 是奇数, 那么

$$|I-A| = \left|A\left(A^T - I\right)\right| = |A| \left|-(I-A)^T\right| = (-1)^n |I-A| = -|I-A|.$$

于是 $2|I-A| = 0$. 从而 $|I-A| = 0$. 因此 1 是 A 的一个特征值。

五、解:(1) 由 $A^{\mathrm{T}} = \left(I - \frac{a}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = I - \frac{a}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}} = A$ 知, A 是实对称矩阵。

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}} A &= \left(I - \frac{a}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right)\left(I - \frac{a}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right) \\ &= I - \frac{2a}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{a^2}{\left(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\right)^2} \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} \end{aligned}.$$

由已知，$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha \neq 0$，且 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，由正交矩阵的定义，当

$$A^{\mathrm{T}} A = I - \frac{2a}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{a^2}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \alpha\alpha^{\mathrm{T}} = I$$

时，有 $-2a + a^2 = 0$，得 $a = 2\,(a = 0\text{舍去})$.

（2）当 $\alpha = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 时,

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = (1,1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \alpha\alpha^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$A=I-\frac{2}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\1&\lambda&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)=0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$.

由 $(I-A)x=0$ 得，$\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$（已正交）.

由 $(-I-A)x=0$ 得，$\alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

单位化得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\gamma_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，所求正交变换矩阵为 $x=Qy$，标准型为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，同时也是规范型。

六、证明: 反证法。假设 A 是不可逆的, 则存在非零实列向量 α, 使得 $A\alpha=0$. 将正定阵 $AB+B^TA$ 左乘 α^T, 右乘 α 可得

$$0<\alpha^T\left(AB+B^TA\right)\alpha=(A\alpha)^TB\alpha+(B\alpha)^T(A\alpha)=0.$$

从而矛盾。

七、证明: 因为 P 是可逆矩阵，所以充分性是显然的，下证必要性。

根据已知条件可得，方程组 $Ax=0,Bx=0,\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 同解，所以 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，记为 r.

对 A,B 进行行分块，设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

不妨假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 A 的行向量的极大无关组，$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 B 的行向量的极大无关组，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 都是矩阵 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ 的两组极大无关组。

设 $\beta_i=\sum_{j=1}^{r}c_{ij}\alpha_j(i=1,\cdots,r)$，易知 $C=(c_{ij})$ 是可逆的。设 $\beta_i-\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}d_{ij}\alpha_j(i=r+1,\cdots,m)$，$D=(d_{ij})$ 是 $(m-r)\times r$ 矩阵，易知 $P=\begin{pmatrix}C & O\\ D & I_{m-r}\end{pmatrix}$ 是 m 阶可逆矩阵，且满足 $B=PA$.

八、证明：先证明 $|A+D|\neq 0$, 即证明 $(A+D)x=\mathbf{0}$ 只有零解。因为 $x^T(A+D)x=0$, 转置得 $x^T(-A+D)x=0$, 上述两式相加即得 $x^TDx=0$.

由于 D 是对角矩阵且主对角线上元素全大于零, 若设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 则 $x^TDx=0$ 表示 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2=0$. 考虑到 x_i 都是实数, 即有 $x=\mathbf{0}$.

再证明本题的结论，设 $f(t)=|tA+D|$，则 $f(t)$ 是关于 t 的多项式，从而是关于 t 的连续函数。注意到对任意的实数 t，tA 仍是实反对称矩阵，故由上面的讨论可知 $f(t)=|tA+D|\neq 0$，即 $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处不为零的连续函数。

又因为当 $t=0$ 时，$f(0)=|D|>0$，所以 $f(t)$ 只能是 $\mathbb{R}$ 上取值恒为正数的连续函数。特别地，$f(1)=|A+D|>0$.