2020-2021 学年秋冬学期微积分期末模拟考试答案

命题、组织：丹青学业指导中心

一、

(1) 注意到

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq 1$$

因此

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}} \leq 1$$

利用

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

立即得到

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}} = 1$$

(2) 利用

$$\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n} = \frac{2^n \cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{2^n}}{2^n \sin\frac{1}{2^n}} = \frac{\sin 1}{2^n \sin\frac{1}{2^n}}$$

可知

$$\lim_{n \to \infty} \cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n} = \sin 1$$

(3)

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1 + x \cdot \mathrm{e}^x} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}$$

(4)

若 $\alpha \neq 0$, $\quad \lim\limits_{x \to 0}\left(x^{\alpha} \ln x\right)=-\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x^{\alpha}}}=-\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}}=-\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{\alpha}}{\alpha}=0$

若 $\alpha=0$, $\quad \lim\limits_{x \to 0}\left(x^{\alpha} \ln x\right)=\lim\limits_{x \to 0} \ln x=-\infty$

二、

(1)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln \left(e^{x}+2\right)}{e^{x}} d x=-\int \ln \left(e^{x}+2\right) d e^{-x} \\
&=-e^{-x} \ln \left(e^{x}+2\right)+\int \frac{1}{e^{x}+2} d x \\
&=-e^{-x} \ln \left(e^{x}+2\right)+\frac{1}{2} \int \frac{e^{x}+2-e^{x}}{e^{x}+2} d x \\
&=-e^{-x} \ln \left(e^{x}+2\right)+\frac{1}{2} x-\frac{1}{2} \ln \left(e^{x}+2\right)+C \\
&=-\left(\frac{1}{2}+e^{-x}\right) \ln \left(e^{x}+2\right)+\frac{1}{2} x+C
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x \cos x}{\sin ^{3} x} d x=-\frac{1}{2} \int x d \frac{1}{\sin ^{2} x} \\
&=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sin ^{2} x}-\int \csc ^{2} x d x\right] \\
&==-\frac{1}{2} \frac{x}{\sin ^{2} x}-\frac{1}{2} \cot x+C
\end{aligned}
$$

三、

(1)$f(x)=(\arcsin x)^{2}$, 则

$$
f^{\prime}(x)=2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}} \tag{1}
$$

故

$$
\left(1-x^{2}\right) f^{\prime 2}(x)=4 f(x) \tag{2}
$$

对 (2) 式两边关于 x 求导得

$$
-2 x f^{\prime 2}(x)-2\left(1-x^{2}\right) f^{\prime}(x) f^{\prime \prime}(x)=4 f^{\prime}(x)
$$

即

$$-xf'(x)+\left(1-x^{2}\right)f''(x)=2 \tag{3}$$

应用 Leibniz 公式, 对 (3) 式两边关于 x 求 n 阶导数得

$$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+\left(1-x^{2}\right)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0 \tag{4}$$

由 (1)(3)(4) 得

$$f'(0)=0, f''(0)=2, \quad f^{(n+2)}(0)=n^{2}f^{(n)}(0)(n\geq 1) \tag{5}$$

由 (5) 式得

$$f^{(2k+1)}(0)=0 \tag{6}$$

$$f^{(2k)}(0)=(2k-2)^{2}(2k-4)^{2}\cdots 2^{2}\cdot 2 \tag{7}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{x^{3}+1}^{2^{x}}\frac{\sin t}{t^{4}+1}dt&=\frac{d}{dx}(\int_{0}^{2^{x}}\frac{\sin t}{t^{4}+1}dt-\int_{0}^{x^{3}+1}\frac{\sin t}{t^{4}+1}dt)\\&=\frac{2^{x}\ln 2\sin 2^{x}}{16^{x}+1}-\frac{3x^{2}(\sin x^{3}+1)}{(x^{3}+1)^{4}+1}\end{aligned}$$

四、

因为

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+o(x)\\ \mathrm{e}^{x^{2}}\sin x&=\left[1+x^{2}+o\left(x^{2}\right)\right]\cdot\left[x+o\left(x^{2}\right)\right]\\&=x+o\left(x^{2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x}+\frac{\mathrm{e}^{x^{2}}\sin x}{x^{2}}&=\frac{f(0)+f'(0)x+o(x)}{x}+\frac{x+o\left(x^{2}\right)}{x^{2}}\\&=\frac{f(0)+1}{x}+f'(0)+\frac{o(x)}{x}+\frac{o\left(x^{2}\right)}{x^{2}}\end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\mathrm{e}^{x^{2}}\sin x}{x^{2}}\right)=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)+1}{x}=1-f'(0)$,

所以 $f(0)=-1, \quad f'(0)=1$.

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶带皮亚诺型余项的泰勒公式为

$$f(x)=-1+x+o(x)$$

五、

由于

$$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}$$

因此

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p u_n}{1-\cos\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{p+2}}}\frac{2}{\pi^2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+2}}:\begin{cases}\text{收敛}, p>-1, \\ \text{发散}, p\leq -1.\end{cases}$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n:\begin{cases}\text{收敛}, p>-1\ , \\ \text{发散}, p\leq -1.\end{cases}$

六、

首先由 $\int_0^\pi f(x)\sin x\ \mathrm{d}x=0$, 利用积分中值定理, 存在 $x_0\in(0,\pi)$ 使得 $f(x_0)=0$. 接下来我们用反证法, 假定 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内只有一个零点 x_0, 则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 (x_0,π) 内都是不变号的, 且这两部分是异号的. 那么 $f(x)\sin(x-x_0)$ 就在 $(0,\pi)$ 内不变号, 于是

$$\begin{aligned}0 &\neq \int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x \\ &=\int_0^\pi [f(x)\sin x\cos x_0-f(x)\cos x\sin x_0]\,\mathrm{d}x \\ &=\cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin x\ \mathrm{d}x-\sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos x\ \mathrm{d}x \\ &=0\end{aligned}$$

矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上必定还有零点. 即至少存在两个不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$, 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

七、

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+2}=1$, 所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$ 的收敛半径

为 $R=1$. 又因为当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$ 均不收敛，所以其收敛域为 (-1,1) .

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^n.$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\quad x\in(-1,1)$$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, 则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}x\in(-1,1)$.
因为 $S(0)=0$, 所以 $\quad S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\ln(1+x)$.
从而 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n=\begin{cases}\frac{1}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 2, & x=0\end{cases}$
八、
(I) 令 $\mathrm{g}(x)=xf(x), g(0)=g(x_0)=g(1)=0$. 由罗尔定理, 可知存在 $\xi\in(0,x_0), \xi_2\in(x_0,1)$, 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$, 即

$$\xi_1 f'(\xi_1)+f(\xi_1)=\xi_2 f'(\xi_2)+f(\xi_2)=0$$

(II) 由 $f(x_0)=f(1)=0$, 以及罗尔定理, 可知存在一点 $\eta\in(x_0,1)$, 使得 $f'(\eta_1)=0$. 又 $f''(x)>0, x\in(x_0,1)$, 故 $f'(x)$ 在 $(x_0,1)$ 内单调增加, 从而存在一点 $\zeta_1\in(x_0,\eta_1)$, 使得 $f'(\zeta_1)<f'(\eta_1)=0$

已知 $f(0)<0$, 由拉格明日中值定理, 可知存在一点 $\zeta_2\in(0,x_0)$, 使得

$$0<\frac{f(0)-f(x_0)}{0-x_0}=f'(\zeta_2)$$

由 $f'(x)$ 连续及 $f'(\zeta_1)\cdot f'(\zeta_2)<0$, 由零点定理, 可知存在一点 $\eta_2\in(\zeta_2,\zeta_1)$, 使得 $f'(\eta_2)=0\,(\eta_2<\eta_1)$.$f'(x)$ 在 [0,1] 上可导, 且 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$, 由罗尔定理, 可知存在一点 $\eta\in(\eta_2,\eta_1)$, 使得 $f''(\eta)=0$.
九、

（I）D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^{\sqrt{3}} \pi \ln^2 x \ \mathrm{d}x = \pi x \ln^2 x\Big|_1^{\sqrt{3}} - 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \ln x \ \mathrm{d}x \\
&= \pi\sqrt{3}\ln^2\sqrt{3} - 2\pi(x\ln x - x)\Big|_1^{\sqrt{3}} \\
&= \pi\sqrt{3}\ln^2\sqrt{3} - 2\pi(\sqrt{3}\ln\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)
\end{aligned}
$$

（II）曲线段 L 的长为

$$
\begin{aligned}
l = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ \mathrm{d}x &\xlongequal{x=tant} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin t \cdot \cos^2 t} \ \mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=cost} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-u^2)\,u^2} \ \mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{u}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + 2 - \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

十、

（I）当 $x \neq 0$ 时， $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}$.

令 $g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$, 则 $g'(x) = x\mathrm{e}^x$.

易知 $g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1 > g(0) = 0, \quad x \neq 0$

当 $x \neq 0$ 时， 又因为 $x\left(\mathrm{e}^x - 1\right) > 0$, 所以 $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)} > 0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$.

（II）因为 $x_1 = 1$, 所以 $x_2 = f\left(x_1\right) = \ln\dfrac{\mathrm{e}-1}{1} < 1$, 故 $0 < x_2 < x_1$.

由于函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 0$, 所以

$$
0 < x_3 = f\left(x_2\right) < f\left(x_1\right) = x_2
$$

由归纳法可知，数列 $\{x_n\}$ 是单减数列且 0 是其下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $A = \inf\{x_n\} \geqslant 0$.

若 $A > 0$, 由 $x_{n+1} = f\left(x_n\right)(n = 1, 2, \cdots)$ 及 $f(x)$ 在 $x = A$ 处连续，得

$A=f(A)$.

这与 $f(A)=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{-1}-1}{A}<A$ 矛盾. 所以 $A=0$.

(III) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2x}=\dfrac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_n\right)}{x_n}=\dfrac{1}{2}$.

由比值判敛法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

十一、

不存在这样的连续函数。

解法一

用反证法, 假设存在满足题目要求的连续函数 $f(x)$, 则其应该满足 1), 2) 条件.

1) $f(x)$ 是单射。若不然，设存在 $x_1,x_2\left(x_1\neq x_2\right)$, 使得 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$. 从而有 $f\left(f\left(x_1\right)\right)=f\left(f\left(x_2\right)\right)$, 即 $e^{-x_1}=e^{-x_2}$, 推出 $x_1=x_2$, 矛盾!

2) 连续函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严格单调函数。若不然，假设

$$x_1<x_2<x_3\quad\text{且满足}\quad f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right),f\left(x_2\right)>f\left(x_3\right)$$

(对 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right),f\left(x_2\right)<f\left(x_3\right)$ 情形，可类似讨论)

不妨设 $f\left(x_1\right)<f\left(x_3\right)$, 因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，由连续函数介值定理知

存在 $x_0\in\left(x_1,x_2\right)$, 使得 $f\left(x_0\right)=f\left(x_3\right),x_0\neq x_3$, 与 1) 矛盾。

这样由条件 2) 知不论函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严格单调递增函数，还是严格单调递减函数，$f(f(x))$ 都是严格单调递增函数，但 e^{-x} 却是严格单调递减的，这就产生了矛盾的。

从而题目中要求的连续函数不存在。

解法二

用反证法, 假设存在满足题目要求的连续函数 $f(x)$, 则其应该满足 1), 2) 条件.

1) $\forall x\in\mathbb{R},f(x)\neq x$.

若不然，设存在 x_0 使得 $f\left(x_0\right)=x_0$. 对 $f\left(f\left(x\right)\right)=e^{-x}$, 两边同时求导，推

出 $f'(f(x))f'(x) = -e^{-x}$, 代入 $x = x_0$ 得，$f'(f(x_0))f'(x_0) = (f'(x_0))^2 = -e^{-x_0} < 0$, 矛盾!

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) \neq x$.

由 1) 可知，由于 $f(x)$ 是连续函数，故必有 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ 或者 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$.

若 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$，则有 $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) > f(x) > x$,

若 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$，则有 $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) < f(x) < x$,

因此 $\forall x \in \mathbb{R}$, 必有 $f(f(x)) \neq x$ 成立。

这样由条件 2) 知函数 $f(f(x)) \neq x$ 与题目中 $f(f(x)) = e^{-x} = x$, 在 $(0,1)$ 中有解, 产生了矛盾的。

从而题目中要求的连续函数不存在。