

2020-2021 学年秋冬学期高等代数期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

欢迎大家参加期末模拟考，下面是考试须知：

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。
3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分后交卷离开。
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。
5. 遵守考场纪律。

一、计算下列行列式：(10')

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

二、设 A, B 是 n 阶矩阵，证明 (10')

$$r(A - ABA) = r(A) + r(I - BA) - n.$$

三、设 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵，且 $m \geq n$. 求证：(15')

(1) $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$.

(2) 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是实 n 维行向量，且 $\alpha\alpha^T = 1$. 试求矩阵 $I_n - 2\alpha^T\alpha$ 的特征值。

四、设 A 是一个 n 阶正交矩阵, 证明: (15')

(1) 如果 A 有特征值, 那么它的特征值是 1 或 -1 ;

(2) 如果 $|A| = -1$, 那么 -1 是 A 的一个特征值;

(3) 如果 $|A| = 1$, 且 n 是奇数, 那么 1 是 A 的一个特征值。

五、设 α 为 3 维非零实列向量, $A = I - \frac{a}{\alpha^T \alpha} \alpha \alpha^T$ 为正交矩阵, $a \neq 0$, I 为 3 阶单位矩阵。(15')

(1) 求 a 的值;

(2) 当 $\alpha = (1, 1, 0)^T$ 时, 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 化为规范型。

六、设 A 是 n 阶实对称矩阵, 若存在 n 阶实矩阵 B , 使 $AB + B^T A$ 是正定矩阵, 求证: A 为可逆矩阵。(10')

七、设 A, B 都是数域 \mathbb{F} 上的 $m \times n$ 矩阵, 求证: 方程组 $Ax = 0, Bx = 0$ 同解的充要条件是存在可逆矩阵 P , 使 $B = PA$ 。(10')

八、设 A 是 n 阶实反对称矩阵, $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶对角矩阵且主对角线上元素全大于零, 求证: $|A + D| > 0$ 。(15')

答题卡:

答题卡:

答题卡: