2020-2021 学年秋冬学期数学分析期末模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

欢迎大家参加期末模拟考，下面是考试须知:

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。

2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。

3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。

4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。

5. 遵守考场纪律。

一、求下列极限（每小题 5'）

(1)

$$\lim_{n\to\infty} n[e^2-(1+\frac{1}{n})^{2n}].$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1} b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\quad (b>1)$$

二、设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的正的递减连续函数, 且 $d_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$. 证明数列 $\{d_n\}$ 收敛.（10'）

三、证明：设实值函数 f 在实数集 E 上一致连续，若 $\{x_n\}$ 为 E 中任意柯西数列, 则 $\{f(x_n)\}$ 也是柯西数列. 反之, 如果实值函数 f 定义在一个有界的实数集 E 上, 并将 E 中的任意柯西数列变成柯西数列, 则 f 在 E 上是一致连续的.（10'）

四、设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$.（10'）证明: 存在

$\xi \in (a,b)$ 使得

$$\left|f''(\xi)\right| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

五、设 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续可导, 是否存在 $f(x)$ 使得

$$|f(x)| > \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x$$

六、设 $f(x)$ 在 [-1,1] 上可积, 且在点 $x=0$ 处连续. 设

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} (1-x)^n, & x \in [0,1] \\ e^{nx}, & x \in [-1,0] \end{cases}$$

证明 : $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{-1}^1 f(x)\Phi_n(x)\mathrm{d}x = f(0)$.（10'）

七、设 $f(x) = \int_0^x \cos\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$, 求 $f'(0)$.（10'）

八、设 $f(x)$ 为 [0,1] 上的非负连续函数, 且满足 $f^2(x) \leqslant 1 + 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.（10'）证明

$$f(x) \leqslant 1+x, \quad x \in [0,1]$$

九、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 并且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = A$. 求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=A$（10'）

十、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.（10'）证明:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\ \mathrm{d}x = 0$$

答题卡:

答题卡:

答题卡: