2022—2023 学年秋冬学期微积分期末模拟考

命题组织: 丹青学园学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考，考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音;

2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角;

3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场;

4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终止时间一到，应立即停止答题，离开考场;

5. 遵守考场纪律

1 (10)求极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{\ln(1+x^2)-\sin^2 x}$$

2 (10)计算反常积分。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln(\cos x)\,dx$$

3 (10)计算不定积分。

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$$

4 (6)求极限。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{\cos\pi}{n+1}\right)$$

5 (10)求$y=\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$的极值，并判断凹凸性。

6 (10)设曲线方程为$y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,dt$，$0\le x\le\pi$，求曲线长度。

7 (10)已知$f(x)=e^{x^2\cos\sqrt{x}}$，将$f(x)$展开成如下形式。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4)$$

8 (8)设$y=y(x)$由$\int_3^{3y}e^{-(u-2)^2}du+x^2y=3x$所确定, 求$y=y(x)$在$x=0$ 处的切线方程。

9 (10)若$f(x)$在$[0，+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 证明$f(x)$在$[0，+\infty)$上一定存在最大值。

10 (8)设$f(x)$为定义在R上的函数, $0<k<1$, 若对任何$x，y\in R$, 都有

$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$$

证明:

（1） $kx-f(x)$单调递增。(4)

（2） 不可能同时存在两点α，β，使得$f(\alpha)=\alpha$，$f(\beta)=\beta$。(4)

11　(4) 设 $f(x)$ 在 $\left[a, \ b\right]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(2)}(x)\right|$，证明：

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{M(b-a)^3}{24}$$

12 (4)已知：若$f(x)$为定义域I上的凸函数，则$\forall\, x_1$，$x_2\in I$，$\gamma\in\left(0, \ 1\right)$，有

$$f(\gamma x_1+(1-\gamma)x_2)\le \gamma f(x_1)+(1-\gamma)f(x_2)$$

若 $0<\alpha<1$，x，$y\ge 0$，证明

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha}\le \alpha x+(1-\alpha)y$$