

# 2022—2023 学年秋冬学期线性代数期末模拟考 (乙)

命题组织: 丹青学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考, 考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上, 电子设备关机或静音;
2. 请对号入座, 并将身份证或校园卡放在桌面左上角;
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试, 考试进行三十分钟后方可交卷离开考场;
4. 开考信号发出后方可开始答题, 考试终止时间一到, 应立即停止答题, 离开考场;
5. 遵守考场纪律。

(20 分) 一、解答下列题目.

(1) 假设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶方阵,  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  的代数余子式, 证明:

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} + t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} = |A| + t \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ij}.$$

(提示: 将每一列都拆分成两项并进行分类讨论)

(2) 计算  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ij}$ , 其中  $|A|$  为  $n$  阶行列式且

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

(10 分) 二、已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求所有与  $A$  可交换的矩阵和计算  $(A - E)^{-1}$ ;

(2) 若  $AB + E = A^2 + B$ , 求  $B$ .

(10 分) 三、求下列向量组的秩. 如果向量组线性相关, 试找出其中的一个极大线性无关组, 并用它线性表出剩余的向量.

(1)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(2)

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(15 分) 四、假设 4 阶矩阵  $A$  的特征值分别为 1, 2, 3, 4, 对应的特征向量分别为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 设  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式, 计算  $\sum_{i=1}^4 A_{ii}$ .

(2) 设  $\beta_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \\ A_{4i} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, 4$ . 证明对  $i = 1, 2, 3, 4$  都有  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  是正交的.

(15 分) 五、已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + \beta x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$  的秩为 2

(1) 写出  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵  $A$  并计算  $\beta$ ;

(2) 求一个正交矩阵  $Q$  满足  $Q^T A Q$  为对角矩阵, 且写出  $f(x_1, x_2, x_3)$  的标准型和对应的正交替换.

(10 分) 六、设有两个非齐次方程组 (I) 和 (II), 其中 (I) 的一个特解为  $\gamma$ , 对应的导出组的一个基础解系为  $\eta_1, \eta_2$ . (II) 的一个特解为  $\delta$ , 对应的导出组的一个基础解系为  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . 其中

$$\gamma = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求方程组 (I) 和 (II) 的公共解.

(10 分) 七、证明  $A^2 = A$  的充要条件是  $r(A - E) + r(A) = n$ .

(10 分) 八、证明: 对任一  $n$  阶实可逆矩阵  $A$ , 都存在正交矩阵  $T_1, T_2$  使得

$$A = T_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T_2.$$

其中  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$  是  $A^T A$  的全部特征值, 且对于  $i = 1, 2, \dots, n$  有  $\lambda_i > 0$ . (提示: 注意  $A^T A$  是正定矩阵.)