2022—2023 学年秋冬学期高数期末模拟考

参考答案

1.(1).

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$= x - \mathrm{arctg}x + C.$

(2).

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

解 $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \mathrm{tg}\frac{x}{2} + C.$

(3).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\mathrm{arc\ tg}\sqrt{x} + C.$

2.

证 首先注意，$\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{xf(x)}{f(x)} = 0$，故若规定$\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$是 $x\geqslant 0$ 上的连续函数. 因为

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t > 0 \quad (x>0),$$

所以，当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $\varphi(x)$递增.

3.

用 −1 乘第二列后加到第一列，得

$$D = \begin{vmatrix} 100 & 32053 \\ 100 & 75184 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 1 & 32053 \\ 1 & 75184 \end{vmatrix}$$

$= 100(75184 - 32053)$

$= 100 \times 43131 = 4313100.$

4.

解 易知方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2.$$

因此，当 $D=(a+2)(a-1)\neq 0$，即 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$ 时方程组有惟一解．又因为易知

$$D_1=\begin{vmatrix} a-3 & 1 & 1 \\ -2 & a & 1 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & a-3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=-3(a-1)^2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & 1 & a-3 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-3(a-1)^2,$$

故其惟一解为：

$$x=\frac{a-1}{a+2},\quad y=z=\frac{-3}{a+2}.$$

5.

证 用 a,b,c,d 作二阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

若(1)成立，则有

$$AA'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 A' 是 A 的逆方阵．从而

$$A'A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $a^2+c^2=1, b^2+d^2=1, ab+cd=0$ 即(2)成立．反之当(2)成立时，由上倒推回去即得(1)也成立．

6.

解：$P(C|A)=\dfrac{P(C)P(C|A)}{P(A)}=\dfrac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95\times +0.05\times 0.995}=\dfrac{19}{218}$

此人真正患有肝癌的概率是 $\dfrac{19}{218}$.