2022—2023 学年秋冬学期期末模拟参考答案

微积分

丹青学园学业指导中心
2022年12月

1 $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^4}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + o(x^4)}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} \cdot x + o(x^4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = -3$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(\cos x)\,dx$

$= \left(-\cos x \ln(\cos x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(-\cos x \ln(\cos x)\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$= \lim_{x \to 0} \left(-\sin x \ln(\sin x)\right) - 1$

$= -1$

3. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

令 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 则 $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$

$$dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}$$

原式 $=\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,t\left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)dt$

$$=\int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt$$

$$=2\int \frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{2(1-t)}-\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

还可继续化简

也可不化简

4

$$\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\cdots\frac{\cos\pi}{n+1}\leq\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{\cos\pi}{n+1}\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\frac{i\pi}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

$\therefore$ 原极限为 $\frac{2}{\pi}$

5 y 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$$y'(x)=\frac{(2x-2)(x+1)-(x-1)^2}{3(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}$$

令 $y'(x)=0 \rightarrow x=1 \quad x=-3$

当 $x<-3$ 时 $y'(x)>0$

当 $-3<x<1$ 时 $y'(x)<0$

当 $x>1$ 时 $y'(x)>0$

$\therefore$ y 的极小值为 $y(1)=0$

极大值为 $y(-3)=-\frac{8}{3}$

$$y''(x)=\frac{8}{3(x+1)^3}>0$$

$\therefore$ y 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,\infty)$ 均为凹函数

6

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2}\, dx$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2}\, d\frac{x}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= 2\sqrt{2}$$

7. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^8)$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$x^2\cos\sqrt{x} = x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{\cos\sqrt{x}} = e^{\left(x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}$$

$$= 1 + \frac{x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{1!}$$

$$+ \frac{\left(x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2}{2!}$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$$

$\therefore a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 1$

$a_3 = -\frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$

当 $x=0$ 时 $\int_3^{3y(0)} e^{-(u-2)^2} du + 0 = 0$

$e^{-(u-2)^2} > 0$ $\therefore$ $y(0) = 1$ 对原式求导

$$\frac{d\int_3^{3y} e^{-(u-2)^2} du}{dy} \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2 y' = 3$$

$$3e^{-(3y-2)^2} y' + 2xy + x^2 y' = 3$$

$x=0$, $y(0)=1$ 代入

$3e^{-1} y'(0) = 3$

$y'(0) = e$

切线方程为

$y - 1 = ex$ $\quad y = ex + 1$

9. $\because \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

$\therefore \exists\, \delta$ 当 $x>A$ 时

$$|f(x)-A|<1$$

$$f(x)<1+A$$

而在 $[0,\delta]$ 上 $f(x)$ 必存在最大值 B

$\therefore f(x)$ 一定存在最大值

$$\max\{B, 1+A\}$$

10 (1) 令 $F(x)=kx-f(x)$

$$F'(x)=k-f'(x)$$

证 $k-f'(x)>0$ 即可.

而 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$ $\forall x,y\in R$

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\le k$$

$\therefore$ $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le k$$ 由 x,y 任意性

固定 x, 令 $y\to x$

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le k$$

即 $f'(x) \leq k$

(2) 若 $\exists\ \alpha, \beta$ $f(\alpha)=\alpha$ $f(\beta)=\beta$

设 $G(x)=f(x)-x$ 则 $G(\alpha)=0$

$G(\beta)=0$ 由罗尔定理

$\exists\ \gamma$ $G'(\gamma)=f'(\gamma)-1=0$

$f'(\gamma)=1$

但 $f'(x)\leq 1<k$，矛盾

1）将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展开

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

两边积分

$$\int_a^b f(x)=\int_a^b 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$+\int_a^b \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$$

$$=\int_a^b \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b M\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$\le \frac{1}{2} M \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{M}{24}(b-a)^3$$

12 当 $x=0$ 或 $y=0$ 时 显然成立

$$x^{\alpha} y^{1-\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha) y$$

两边取 ln

$$\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y \le \ln(\alpha x + (1-\alpha) y)$$

令 $f(x) = \ln x$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

∴ $f(x)$ 为凹函数

∴ $-f(x)$ 为凸函数 由已知

∴ $-\alpha f(x) - (1-\alpha) f(y) \ge -f(\alpha x + (1-\alpha) y)$

即 $\alpha \ln x-(1-\alpha)\ln y \leqslant \ln(\alpha x+(1-\alpha)y)$