2022—2023 学年秋冬学期线性代数期末模拟考解答

命题组织：丹青学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考，考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音;
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角;
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场;
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终止时间一到，应立即停止答题，离开考场;
5. 遵守考场纪律。

符号说明:(1)E_n 为 n 阶单位矩阵, 当下标省略时, 表示使得运算有意义的阶数的单位矩阵;

(20 **分**) **一**、解答下列题目.

(1) 假设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

$$|A(t)|=\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}=|A|+t\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}.$$

(提示: 将每一列都拆分成两项并进行分类讨论)

(2) 计算 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}$, 其中 $|A|$ 为 n 阶行列式且

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

解答. (1) 由于有两列元素相同的行列式的值为 0, 结合行列式的性质我们有

$$|A(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+$$

$$=\cdots=|A|+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t \end{vmatrix}$$

对上式的后 n 项的每个行列式都从 t 所在的列进行展开就得到

$$|A(t)| = |A| + t\sum_{i=1}^{n} A_{i1} + t\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + t\sum_{i=1}^{n} A_{in} = |A| + t\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

(2) 注意到

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2(n-1) = 2n+1.$$

第一个等号是每一列都减去第一列, 第二个等号是第一行加上其他所有的行. 用 (1) 的记号, 令 E_n 为 n 阶单位矩阵, 注意到

$$|A(-2)| = |E_n| = 1 = |A| - 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

解得 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = \frac{1}{2}(2n+1-1) = n.$ □

(10 **分**) **二**、已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求所有与 A 可交换的实矩阵和 $(A-E)^{-1}$;

(2) 若 $AB + E = A^2 + B$, 求 B.

解答. (1) 不妨假设 $B = (b_{ij})$ 与矩阵 A 可交换, 从而 $(A-E)B = AB - B = BA - B = B(A-E)$, 直接计算有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

比较各个元素得到

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{13} & b_{12} & b_{11} \end{pmatrix}.$$

其中 $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}$ 为任意实数.

(甲) 卷 (1) 的答案需要补充后面内容 设 $W(A) = \{B \in R^{3\times 3} | AB = BA\}$, 显然加法交换律和加法结合律是成立的, 零矩阵 O 是 $W(A)$ 的一个零元素, 且每个 $A \in W(A)$, $-A$ 都是对应的负元素. 对于任意矩阵 $B, C \in W(A)$, 任意实数 k, l 都易验证 $(kl)B = k(lB); (k+l)A = kB + lB; k(B+C) = kB + kC$. 从而 $W(A)$ 是一个线性空间, 一组基为

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得到 $\dim W(A) = 5$.

(乙) 卷 (1) 的答案需要补充后面内容直接计算有

$$(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - E.$$

(2) 由于 $AB+E=A^2+B$, 即 $(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$, 结合 $(A-E)$ 可逆有

$$B=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix}2 & & 1\\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{pmatrix}.$$ □

(10 **分**) **三**、求下列向量组的秩. 如果向量组线性相关, 试找出其中的一个极大线性无关组, 并用它线性表出剩余的向量.

(1)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\5\\0\\1\end{pmatrix};$$

(2)

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}4\\1\\2\\-3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}6\\2\\4\\-2\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

解答. (1) 考虑矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 对 A 做初等行变换有

$$A\to\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 7 & 2\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 从而秩为 3.

(2) 考虑矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$, 对 B 做初等行变换有

$$B\to\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6 & 3\\ 3 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6 & 3\\ 0 & 13 & 20 & 7\\ 0 & 10 & 16 & 6\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -4 & -6 & -3\\ 0 & 1 & 12 & 11\\ 0 & 5 & 8 & 3\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -4 & -6 & -3\\ 0 & 1 & 12 & 11\\ 0 & 0 & -52 & -52\\ 0 & 0 & 34 & 34\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

从而向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$ 的秩为 3, 一个极大线性无关组为 β_1,β_2,β_3, 且 $\beta_4=-\beta_1-\beta_2+\beta_3$. □

(15 **分**) **四**、假设 4 阶矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3,4$, 对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 设 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 计算 $\sum_{i=1}^{4}A_{ii}$.

(2) 设 $\beta_i=\begin{pmatrix}A_{1i}\\A_{2i}\\A_{3i}\\A_{4i}\end{pmatrix}$, $i=1,2,3,4$. 证明对 $i=1,2,3,4$ 都有 α_i 和 β_i 是正交的.

解答. (1) 设 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3,\lambda_4=4,\mu_i=\dfrac{|A|}{\lambda_i},i=1,2,3,4$, 由题有 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,i=1,2,3,4$, 且 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=24$. 从而 $A^*A\alpha_i=|A|\alpha_i=\lambda_iA^*\alpha_i$, 即

$$A^*\alpha_i=\frac{|A|}{\lambda_i}\alpha_i=\mu_i\alpha_i.$$

所以对 $i=1,2,3,4$ 都有 μ_i 都是 A^* 的特征值, 对应的特征向量也是 α_i, 从而

$$\operatorname{tr}(A^*)=\sum_{i=1}^4 A_{ii}=\sum_{i=1}^4\mu_i=24+12+8+6=50.$$

(2) 由题有 $A^*=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \beta_3^T\\ \beta_4^T\end{pmatrix}$. 由于

$$A^*\alpha_i=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \beta_3^T\\ \beta_4^T\end{pmatrix}\alpha_i=\begin{pmatrix}\beta_1^T\alpha_i\\ \beta_2^T\alpha_i\\ \beta_3^T\alpha_i\\ \beta_4^T\alpha_i\end{pmatrix}=\mu_i\alpha_i.$$

且注意到对 $i=1,2,3,4$ 都有 α_i 的第 i 个元素都为 0, 即 $\beta_i^T\alpha_i=0$, 命题得证. □

(15 **分**) **五**、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+\beta x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2

(1) 写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 A 并计算 β;

(2) 求一个正交矩阵 Q 满足 Q^TAQ 为对角矩阵, 且写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准型和对应的正交替换.

解答. (1) 显然 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&\beta\end{pmatrix}$, 由于 $r(A)=2$, 所以

$$|A|=24\beta+9+9-45-45=0.$$

解得 $\beta=3$.

(2) 由于 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$, 所以对称矩阵 A 的特征值分别为 $0,4,9$ 且对应的特征向量两两正交. 接下来分别求单位模长的特征向量:

(i) 对于特征值 0, 考虑方程组 $AX=0$, 解得一个单位模长的解为 $q_1=\left(-\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right)^T$;

(ii) 对于特征值 4, 考虑方程组 $(A-4E)X=0$, 解得一个单位模长的解为 $q_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0\right)^T$;

(iii) 对于特征值 9, 考虑方程组 $(A-9E)X=0$, 解得一个单位模长的解为 $q_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt3},-\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)^T$.

从而令

$$Q=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt6}&\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt3}\\ \dfrac{1}{\sqrt6}&\dfrac{1}{\sqrt2}&-\dfrac{1}{\sqrt3}\\ \dfrac{2}{\sqrt6}&0&\dfrac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}.$$

有 Q^TAQ 为对角矩阵, 对应的正交线性变换为 (也可以写成 $Y=Q^TX$)

$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_3; \\ x_2 &= \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_3; \\ x_3 &= \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{cases}$$

对应的标准型为 $f(x_1,x_2,x_3)=4y_2^2+9y_3^2$. □

(10 **分**) **六**、设有两个非齐次方程组 (I) 和 (II), 其中 (I) 的一个特解为 γ, 对应的导出组的一个基础解系为 η_1,η_2.(II) 的一个特解为 δ, 对应的导出组的一个基础解系为 ϵ_1,ϵ_2. 其中

$$\gamma=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\0\end{pmatrix},\eta_1=\begin{pmatrix}-6\\5\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-5\\4\\0\\1\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}-11\\3\\0\\0\end{pmatrix},\epsilon_1=\begin{pmatrix}8\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\epsilon_2=\begin{pmatrix}10\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

求方程组 (I) 和 (II) 的公共解.

解答. 假设 α 是两个方程组的公共解, 即存在 t_1,t_2,m_1,m_2 满足

$$\alpha=\gamma+t_1\eta_1+t_2\eta_2=\delta+m_1\epsilon_1+m_2\epsilon_2.$$

令 $Y=(t_1,t_2,-m_1,-m_2)^T, A=(\eta_1,\eta_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$, 则 Y 是方程组 $AY=\delta-\gamma$ 的解, 从而对增广矩阵 $(A,\delta-\gamma)$ 进行初等行变换有

$$(A,\delta-\gamma)=\begin{pmatrix}-6&-5&-8&-10&-16\\5&4&1&2&6\\1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&-14&-15&-16\\0&0&6&6&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

从而 $Y=(-1,2,-1,2)^T$, 即 $\alpha=\gamma-\eta_1+2\eta_2=(1,0,-1,2)^T$. □

(10 **分**) **七**、证明 $A^2=A$ 的充要条件是 $r(A-E)+r(A)=n$.

解答. 由广义初等行变换有

$$\begin{pmatrix}A-E&\\&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-E&E-A\\&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-E&E\\&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}&E\\A(A-E)&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}&E\\A^2-A&\end{pmatrix}.$$

从而由 $A^2-A=O$ 有

$$r(A-E)+r(A)=r\begin{pmatrix}A-E&\\&A\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}&E\\O&\end{pmatrix}=n.$$

同理由

$$n=r(A-E)+r(A)=r\begin{pmatrix}A-E&\\&A\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}&E\\A^2-A&\end{pmatrix}=r(E)+r(A^2-A)=n+r(A^2-A).$$

进而 $A^2-A=O$. □

(10 **分**) **八**、证明: 对任一 n 阶实可逆矩阵 A, 都存在正交矩阵 T_1,T_2 使得

$$A=T_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}T_2.$$

其中 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 A^TA 的全部特征值, 且对于 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $\lambda_i>0$. (提示: 注意 A^TA 是正定矩阵.)

解答. 由于 A^TA 是实可逆矩阵且是正定的, 从而存在正交矩阵 T_2 使得

$$A^TA = T_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} T_2.$$

其中 $i=1,2,\cdot,n$ 有 $\lambda_i>0$, 由 A 可逆有 A^T 也可逆, 进而

$$A = \left(A^T\right)^{-1} T_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T_2.$$

令

$$T_1 = \left(A^T\right)^{-1} T_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则有

$$T_1\left(T_1\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} T_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T_2A^{-1} = \left(A^T\right)^{-1}(A^TA)A^{-1} = E.$$

从而 T_1 为正交矩阵, 且

$$A = T_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T_2.$$

□