2022—2023 学年秋冬学期线性代数期末模拟考 (甲)

命题组织: 丹青学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期末考，考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音;
2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角;
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场;
4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了时间一到，应立即停止答题，离开考场;
5. 遵守考场纪律。

(20 **分**) **一**、解答下列题目.

(1) 假设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} = |A| + t\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

(提示: 将每一列都拆分成两项并进行分类讨论)

(2) 计算 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}$, 其中 $|A|$ 为 n 阶行列式且

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

(10 **分**) **二**、已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明所有与 A 可交换的矩阵组成的集合构成一个线性空间 $W(A)$, 并求 $\dim W(A)$ 和写出 $W(A)$ 的一组基;

(2) 若 $AB+E=A^2+B$, 求 B.

(10 **分**) **三**、求下列向量组的秩. 如果向量组线性相关, 试找出其中的一个极大线性无关组, 并用它线性表出剩余的向量.

(1)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(2)

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}4\\1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}6\\2\\4\\-2\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(15 **分**) **四**、假设 4 阶矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3,4$, 对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 设 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 计算 $\sum\limits_{i=1}^{4}A_{ii}$.

(2) 设 $\beta_i=\begin{pmatrix}A_{1i}\\A_{2i}\\A_{3i}\\A_{4i}\end{pmatrix}, i=1,2,3,4$. 证明对 $i=1,2,3,4$ 都有 α_i 和 β_i 是正交的.

(15 **分**) **五**、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+\beta x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2

(1) 写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 A 并计算 β;

(2) 求一个正交矩阵 Q 满足 Q^TAQ 为对角矩阵, 且写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准型和对应的正交替换.

(10 **分**) **六**、设有两个非齐次方程组 (I) 和 (II), 其中 (I) 的一个特解为 γ, 对应的导出组的一个基础解系为 η_1,η_2. (II) 的一个特解为 δ, 对应的导出组的一个基础解系为 ϵ_1,ϵ_2. 其中

$$\gamma=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\0\end{pmatrix},\eta_1=\begin{pmatrix}-6\\5\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-5\\4\\0\\1\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}-11\\3\\0\\0\end{pmatrix},\epsilon_1=\begin{pmatrix}8\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\epsilon_2=\begin{pmatrix}10\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

设方程组 (I) 和 (II) 的解空间分别为 W_1,W_2, 求满足 $\alpha\in W_1\cap W_2$ 的 α.

(10 **分**) **七**、证明 $A^2=A$ 的充要条件是 $r(A-E)+r(A)=n$.

(10 **分**) **八**、证明: 对任一 n 阶实可逆矩阵 A, 都存在正交矩阵 T_1,T_2 使得

$$A=T_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}T_2.$$

其中 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 A^TA 的全部特征值, 且对于 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $\lambda_i>0$. (提示: 注意 A^TA 是正定矩阵.)