线性代数模拟题

T1.(10 分) 求行列式

$$A_n=\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

T2.(15 分) 已知 12 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值，求 a 和另外两个特征值。

T3.(10 分) 已知向量空间 V 中 $m(m>1)$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. 求证：存在 m 个不全为 0 的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$, 使对 V 中任一向量 β, 向量组 $\beta,\alpha_1+c_1\beta,\cdots,\alpha_m+c_m\beta$ 都线性相关。

T4.(15 分) 用 Cramer 法则求解下列方程组.

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=7, \\ 3x_2-x_3+x_4=6, \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=-4. \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+\epsilon y+\epsilon^2 z=\epsilon, \\ x+\epsilon^2 y+\epsilon z=\epsilon^2. \end{cases}$$

T5.(15 分) 化下列二次型为标准型并求秩：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}.$$

T6.(15 分) 设 a 为常数,求向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在基 $\{f_1=(a^{n-1},a^{n-2},\cdots,a,1),f_2=(a^{n-2},a^{n-3},\cdots,1,0),\cdots,f_n=(1,0,\cdots,0,0)\}$ 下的坐标。

T7.(10 分) 设 A 为 n 阶方阵，$A^3=0$. 求证：

(1) $I_n - A$ 可逆.

(2) 若 B 也为 n 阶矩阵，满足 $AB+BA=B$, 则 $B=0$.

T8.(10 分) 设 A,B 是 n 阶矩阵，若 A 有 n 个不同的特征值且 $AB=BA$, 求证：B 相似于对角矩阵。