浙江大学
2023-2024 学年秋冬学期期末考试模拟试卷

考试用时：120 分钟　　　　课程名称：**微积分（I）**

姓名：　　　　学号：　　　　任课老师：

---

1. 求极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{1}{t}(e^{xt}-1)\mathrm{d}t}{x^2}.$$

2. 求极限，其中 $f(x)$ 在 a 处可导，$f(a)\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}]^n.$$

3. 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\tan^{2024}\alpha}.$$

4. 令 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$
   - 证明下列极限存在：

   $$\lim_{n\to\infty}(x_n-\ln n).$$

   - 利用上述结论，求极限

   $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{4n}\frac{1}{k}.$$

5. 星形线 $\begin{cases} x=acos^3t \\ y=asin^3t \end{cases}$ ，$0\le t\le 2\pi$.
   - 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
   - 求出其绕着 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积.

6. $f(x)=\arcsin x$，求 $y^{(2024)}(0)$.

7. 求反常积分:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x \mathrm{d}x}{x^2}$$

8. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2(\sin\frac{1}{x})^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 求出 $f(x)$ 的导函数并讨论导函数的连续性.

9. $f(x) = \int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$，试求定积分：

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

10. （**Jensen** 不等式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且二阶导大于零。则对于 $\forall a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b, k_i \geq 0, \sum_{i=1}^n k_i = 1$，有：

$$f(\sum_{i=1}^n k_i x_i) < \sum_{i=1}^n k_i f(x_i)$$

这是微积分中一个重要的不等式，试证明 $n = 2$ 的情况.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调不增，试证明：

$$\forall \alpha \in (0,1), \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geq \alpha \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

12. （**Gronwall** 不等式）设 $K > 0, f(x), g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数，满足：

$$f(x) \leq K + \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

- 证明不等式：

$$f(x) \leq K e^{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$$

- 利用上述结论，证明下面的推导成立.

$$f(x) \leq \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$