T_1 $n=1$ $A_1=a_0+a_1=a_0a_1(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1})$.

$n=2$. $A_2=a_0a_1a_2(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})$.

对A_n按第n行展开,可得

$$A_n=(a_{n-1}+a_n)A_{n-1}-a_{n-1}\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & & \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{n-1}+a_n)A_{n-1}-a_{n-1}^2A_{n-2}.$$

递推可得 $A_n=\prod_{i=0}^{n}a_i(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i})$.

T_2. 由 $|12I_3-A|=0 \Rightarrow a=-4$.

再$|\lambda I_3-A|=0$ 代入 $\lambda_1=12$ $\lambda_2=3$(二重).

T_3. 计算行列式即可

(1). $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

T_4 $\because \alpha_1$ α_2 $\cdots\alpha_m$线性相关.

$\therefore \exists k_i$ $i=1.2\cdots m$ 不全为零 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0$

$\because m>1$ k_i不全为零.

$\therefore \exists c_1$ $c_2\cdots c_m$ $\sum k_ic_i=-1$

$\therefore \forall\beta$ $\beta+\sum k_i(\alpha_i+c_i\beta)=0$

T5. 该二次型系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \frac{1}{2} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & & & \end{pmatrix}$

其正负惯性指数为 n. ∴标准型为

$f = y_1^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \cdots - y_{2n}^2$.

秩为 $2n$.

T6 设 $e_1 \cdots e_n$ 为标准单位行向量.

$\{e_1 \cdots e_n\}$ 到 $\{f_1 \cdots f_n\}$ 过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 \\ a^{n-2} & a^{n-3} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a & & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

设 α 在 $\{f_1 \cdots f_n\}$ 下坐标向量为 $x=(x_1 \cdots x_n)$.

则 $Ax=\alpha$.

$\Rightarrow x=(a_n, a_{n-1}-aa_n, \cdots, a_2-aa_3, a_1-aa_2)$.

T7. ∵ $(I_n-A)(I_n+A+A^2) = I_n - A^3 = I_n$

∴ I_n-A 可逆.

(2). ∵ $AB = B(I_n-A)$

∴ $A^3B = B(I_n-A)^3 = O$

∵ I_n-A 可逆. ∴ $B=O$

T8 $\because A$ 可对角化 记 $C=\operatorname{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$.

$\therefore \exists P$ 可逆 $A=PCP^{-1}$

$\because AB=BA$

$\therefore PCP^{-1}B=BPCP^{-1}$

$\Rightarrow CP^{-1}BP=P^{-1}BPC$.

$\because B$ 和 $P^{-1}BP$ 相似.

$\therefore$ 可假定 $A=C$.

设 $B=(b_{ij})_{i,j}$

$AB=(\lambda_i b_{ij})_{i,j}$

$BA=(\lambda_j b_{ij})_{i,j}$

$\therefore \lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ij}$

$\because$ 若 $i\neq j$ $\lambda_i\neq\lambda_j \Rightarrow b_{ij}=0$

$\therefore B$ 为对角阵.