2022—2023 学年春夏学期高等代数与解析几何 期中模拟考

命题组织:丹青学园学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考, 考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上, 电子设备关机或静音;
2. 请对号入座, 并将身份证或校园卡放在桌面左上角;
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试, 考试进行三十分
钟后方可交卷离开考场;
4. 开考信号发出后方可开始答题, 考试终止时间一到, 应立即停止答题, 离开考场;
5. 遵守考场纪律

1、将下列二次型化为对角型 $f(y_1, y_2, y_3)$ (8)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

并判断 $f(y_1, y_2, y_3) = 1$ 的曲面类型(4)

2、设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$, $g(x) = x^2 - x + 1$, 设 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$,
 $\deg r < \deg g$, 求 $q(x)$, $r(x)$ (10)

3、设 A 是可逆实对称矩阵, 矩阵 B 满足 $B = -B'$, 证明 $(A + B)'$ $(A + B)$ 正定(12)

4、 $f(x)$ 是一个 n 次多项式, 当 $k = 0, 1, \dots, n$ 时有 $f(k) = \frac{k}{n+1}$, 求 $f(n+1)$, (12)

5、设直线

$$l_1: \begin{cases} x = \frac{3}{2}t + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

求所有由 l_1 和 l_2 上相同参数 t 值的点连线所构成的曲面方程, 并判断是和曲面。
(12)

6、设 V 为数域 K 上 n 阶矩阵组成的线性空间, 设 $A \in V$,

(1) 证明与 A 乘法可交换的矩阵全体 $C(A)$ 为 V 的子空间(6)

(2) 在(1)的条件下, 设 T 是 V 的非空子集, 证明与 T 中任意一矩阵乘法可交换的矩阵全体 $C(T)$ 也是 V 的子空间, 且维数不为0, (6)

7、设奇数次多项式 $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) + 1$, a_i 互不相同, 证明 $f(x)$ 是有理数域上的不可约多项式。(10)

8、设 $A, B, A - B$ 都是 n 阶半正定矩阵, 证明(10)

$$r(A|B) = r(A)$$

9、设 $f(x), g(x)$ 是数域 K 上的互素多项式, φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $f(\varphi)g(\varphi)=0$, 证明 $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 $V_1 = \text{Ker } f(\varphi)$, $V_2 = \text{Ker } g(\varphi)$, (10)

丹青学园学业指导中心