

2023—2024 学年春夏学期线性代数期中模拟考

命题组织: 丹青学业指导中心

欢迎大家模考由丹青学园学业指导中心举办的线性代数模拟期中考, 符号说明:(1) E_n 为 n 阶单位矩阵, 当下标省略时, 表示使得运算有意义的阶数的单位矩阵;

(10 分) 一、计算下列行列式, 其中 $x_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

(15 分) 二、已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求所有与 A 可交换的实矩阵所构成的集合和 A^*, A^{-1} .

(15 分) 三、对于 a 的取值, 讨论下述线性方程组的解的情况.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6. \end{cases}$$

(15 分) 四、假设 A 是 n 阶实矩阵, 证明下述式子.

(1) $r(A) = r(A^T)$;

(2) 若 B, C 也是 n 阶实矩阵, 且满足 $A = A^2B = CA^2$, 证明存在矩阵 D 使得

$$A = ADA, D = DAD, AD = DA.$$

(15 分) 五、设 n 阶矩阵 A, B 的元素都是非负数, 证明: 如果 AB 中有一行的元素全为 0, 那么 A 或 B 中有一行元素全为 0.

(15 分) 六、证明 $A^2 = E$ 的充要条件是 $r(A - E) + r(A + E) = n$.

(15 分) 七、求解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.