2022—2023学年春夏学期微积分期中模拟考

命题组织:丹青学园学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考，考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音;

2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角;

3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场;

4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终止时间一到，应立即停止答题，离开考场;

5. 遵守考场纪律

1、求过点$M(4, 2, -3)$，平行于平面S：$\mathrm{x}+y+z=1$，且垂直于直线

$$l:\ \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x+z-5=0 \end{cases}$$

的直线方程。（8）

2、已知平面S：$\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}-1=0$，点$A(1, 2, -1)$，$B(2, -3, 1)$，设$B$在$S$上的投影为$B_1$，现过$A$点向$S$引射线，使得直线与$S$呈夹角$\frac{\pi}{4}$，

（1） 问这族射线与S构成的封闭曲面体积是多少？（5）

（2） 记上述射线与S的交点为A_1，问当线段A_1B_1距离最短时，直线AA_1绕直线BB_1旋转形成的曲面是什么曲面，并简要说明理由。（5）

3、设直线l_1，l_2方程如下

$$l_1:\ \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$$

$$l_2:\ \begin{cases} 2x-y+z-2=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

求过直线l_1，平行于直线l_2的平面方程。（8）

4、设直线l_1，l_2，l_3方程如下

$$l_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{1}$$

$$l_2:\ \begin{cases} z-x-1=0 \\ z-2y-3=0 \end{cases}$$

$$l_3:\ \begin{cases} x+2y-4=0 \\ z-y-1=0 \end{cases}$$

（1） 求l_2与l_3的最短距离（4）

（2） 求平行于l_1，与l_2和l_3都相交的直线方程。（4）

5、求

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$$

的收敛域（4）与和函数（4），并求调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

的值（2）

6、求$f(x)=\ln(2x^2+5x+2)$的麦克劳林级数（6），求其收敛域（2），并计算$f^{(2023)}(0)$（2）

7、将$f(x)=x+x^2$在$[-\pi，\pi]$上展开成傅里叶级数（6），并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

的和（2）。提示：最终结果由两个级数求和得到。

8、设$z=(x^2+y^2)^{arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$，求其在点$(1，1)$的全微分。（8）

9、已知

$$f(x，y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

（1） 求$f_x{}'(0，0)$，$f_y{}'(0，0)$（4）

（2） 问$f_x{}'$和$f_y{}'$在$(0，0)$处是否连续？（2）

（3） 判断$f(x，y)$在$(0，0)$处是否可微（2）

10、设$f(x，y)$在全平面内有连续的偏导数，且$f(x，x^2)=1$

（1） 若$f_1{}'(x，x^2)=x$，求$f_2{}'(x，x^2)$（4）

（2） 若$f_2{}'(x，y)=x^2+y$，求$f(x，y)$（2）

11、已知$p \geq 0$

（1） 对于交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$，其中$a_n$收敛到 0，令$b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$，

若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛（4）

（2） 求下列级数的敛散性（条件收敛，绝对收敛，发散）（4）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$$

12、对于二元函数$f(x,y)$，若

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

则称$f(x,y)$为关于x和y的调和函数，现设$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

（1） 证明x为关于u和v的调和函数（4）

（2） 说明$g=xy$是否为关于u和v的调和函数（2）

（3） 若$\omega(x,y)$为关于x和y的调和函数，则$\omega\left(x(u,v),y(u,v)\right)$是否为关于$u$和$v$的调和函数？（2）