

2022—2023 学年春夏学期数学分析期中模拟考

命题组织:丹青学园学业指导中心

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考, 考试须知如下:

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上, 电子设备关机或静音;
2. 请对号入座, 并将身份证或校园卡放在桌面左上角;
3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试, 考试进行三十分
钟后方可交卷离开考场;
4. 开考信号发出后方可开始答题, 考试终止时间一到, 应立即停止答题, 离开考场;
5. 遵守考场纪律

1、SD 计算下列积分(6×2)

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(\cos x) dx$$

(2)

$$\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

2、判断下列积分或函数的收敛性(6×3)

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$$

(2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

(3) $p \geq 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$$

3、研究函数项级数在给定区间的一致收敛性(6×2)

(1) $0 < x < +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

(2) $a < x < b$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{x^2} + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

4、计算下列极限(6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}} + \frac{\cos \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{\cos \pi}{n + 1} \right)$$

5、求 $y = 2x - x^2$, $y = 0$ 构成的封闭图形绕 Oy 轴旋转一周的体积(6)

6、设曲线方程为 $y = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$, $0 \leq x \leq \pi$, 求曲线长度(6)

7、设 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = 0$$

证明: $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有两个零点(8)

8、证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^2}$$

在 $(1, +\infty)$ 上连续(8)

9、已知 $p \geq 0$

(1) 对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, 其中 a_n 收敛到 0, 令 $b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$,

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛(4)

(2) 利用 (1) 求下列级数的敛散性 (条件收敛, 绝对收敛, 发散) (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[n + (-1)^{n-1}]^p}$$

10、设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, 证明: (8)

$$\max_{0 \leq x \leq 2} |f'(x)| \geq \int_0^2 |f(x)| dx$$

11、若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散到 ∞ , 记其前 n 项和为 S_n

(1) 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$$

发散(4)

(2) 问

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

敛散性如何(4)