

微积分甲模拟期中考

1. 用“ $\varepsilon - N$ ”语言证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$.

2. 计算极限: $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

3. 计算极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$.

4. 计算极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

5. 计算极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac{1}{n}}}$.

6. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

, 当 α, β 在什么范围上时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

7. 讨论

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性.

8. 设 $f(x) = \frac{1}{\log(3-x)} + \sqrt{49-x^2}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 验证 $g(g(g(x))) = x$, 并求 $g\left(\frac{1}{g(x)}\right), x \neq 0, x \neq 1$

9. 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有定义, 且函数 $e^x f(x)$ 和 $e^{-f(x)}$ 在 $(0, 1)$ 内单调不减, 证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续.

10. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

任意一点的法线到原点的距离为 $|a|$.

11. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$, 证明数列 x_n 的收敛性, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

12. 设 $y = y(x)$ 是可微函数, 满足 $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$, 求 $y'(0)$.

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} & x < 0 \\ A & x = 0 \\ ax^2 + b & x > 0 \end{cases}$$

, 其中 A, a, b 为常数, 求 A, a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

14. 设函数 f 在 x_0 存在左右导数, 试证明 f 在 x_0 连续.

15. 求下列函数的高阶微分 $u(x) = \ln x, v(x) = e^x$, 求 $d^3(uv), d^3\left(\frac{u}{v}\right)$.