线性代数模拟题

T1.(15 分) 求出下列 n 阶行列式，其中 $a \neq b$.

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

T2.(10 分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵，A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵，B, C 如下定义，请求出矩阵 A.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

T3.(10 分) 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

若 A 的秩为 $n-1$, 求 a 的值.

T4.(15 分) 设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵，若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $|B|$ 的值。

T5.(15 分) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同，求证下列线性方程组有唯一解，并写出这个解的形式：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n = b^2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = b^{n-1}. \end{cases}$$

T6.(15 分) 设 A 是 n 阶矩阵，证明下列命题：

(1) 若 $A^2 = A$, 则 $I_n - 2A$ 可逆.

(2) 若 $2A(A - I_n) = A^3$, 则 $I_n - A$ 可逆。

T7.(10 分) 设 A 是 n 阶矩阵，证明下列命题：

(1) 若 A 是对称矩阵，即 $a_{i,j} = a_{j,i}\ \forall i, j$, 则 A 是零矩阵的充要条件是任意的 n 维列向量 α, 有 $\alpha^T A \alpha = 0$.

(2) A 是一个反对称矩阵，即 $a_{i,j} = -a_{j,i}\ \forall i, j$, 充要条件是任意的 n 维列向量 α, 有 $\alpha^T A \alpha = 0$.

T8.(10 分) 设 n 阶矩阵 A 的每一行、每一列的元素之和都为零，证明：A 的每个元素的代数余子式都相等.