解答

1. 考虑 $n\geq 2$ $\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{10-5n}{3(3n^2+2n-4)}\right|=\frac{5}{3}\left|\frac{n-2}{3n^2+2n-4}\right|\leq\frac{5}{3}\left|\frac{n}{3n^2-4}\right|$

$\leq\frac{5}{3}\cdot\left|\frac{n}{2n^2}\right|=\frac{5}{6n}<\frac{1}{n}$ 故 $\forall\varepsilon$ $\exists N=\max\{[\frac{1}{\varepsilon}],2\}$ s.t. $\forall n>N$

$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}.$ #

2. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$

$=0+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}\cdot(1+\frac{1}{x+1})^{-1}=e\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+1})^{-1}=e$

4. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^2}=\frac{1}{2}$

5. 原式 $<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$

原式 $>\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n+\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}}}=\frac{1}{3}$

$\uparrow$

(由于 $x+\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上 $\uparrow$)

由夹逼

$\Rightarrow$ 原式 $=\frac{1}{3}$

6. ① $\alpha>0$ $\left|x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}\right|\leq|x^\alpha|$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ $\Rightarrow$ 连续 ✓.

② $\beta<0$ $x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}\sim x^{\alpha-\beta}$ $(x\to 0)$ $\alpha-\beta>0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-\beta}=0=f(0)\Rightarrow$ 连续 ✓.

$\alpha-\beta\leq 0$ 不连续

③ $\alpha=0$ $\beta\geq 0$ $f(x)=\sin\frac{1}{x^\beta}(x\neq 0)$, $\beta=0$ $f(x)=\sin 1$ $(x\neq 0)$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq 0\Rightarrow$ 不连续

$\beta>0$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^\beta}$ 不存在 $\Rightarrow$ 不连续.

④ $\alpha<0$ $\beta\geqslant 0$. $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}$ 不存在 $\Rightarrow f(x)$ 不连续.

故综上 在 $\alpha>0$ 或 $\beta<0$ 且 $\alpha-\beta>0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7. 考虑 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的连续性 若 $x_0\neq m$(整数) 取 x_0 附近收敛到 x_0 的有理数列 $\{p_n\}$ 和无理数列 $\{q_n\}$ (数列的存在性由实数的稠密性易知)

$f(p_n)=\sin\pi p_n\to\sin\pi x_0\neq 0.$ $f(q_n)=0$ 故此时 f 不连续

若 $x_0=m$ ~~解得得出~~ ~~实数~~ 考虑有理数 x ~~$|f(x)-f(x_0)|=|\sin\pi x-\sin\pi x_0|\leq|\sin\pi x|$~~

$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to x_0}|\sin\pi x|=\lim\limits_{x\to x_0}|\sin(\pi x-\pi x_0)|\leq\lim\limits_{x\to x_0}\pi|x-x_0|=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0=\lim\limits_{y\to x_0}f(y)$ (y 为无理数) $\Rightarrow f(x)$ 连续

综上 $f(x)$ 仅在整点 ~~实数~~ $x=m$ 处连续.

8. 定义域 ~~$(-\infty,3]\cap[-7,7]=(-\infty,3]$~~ $[(-\infty,2)\cup(2,3)]\cap[-7,7]$

$=[-7,2)\cup(2,3)$

$g(g(g(g(x))))=g(g(\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}))=g(g(\frac{x}{x-x+1}))=g(g(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x\Rightarrow\checkmark$.

$g(\frac{1}{g(x)})=g(\frac{x-1}{x})=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=\frac{x-1}{-1}=1-x$

9. $\forall x_0\in(0,1)$. $x>x_0$. $e^xf(x)$ $e^{-f(x)}$ 单调不减

$\Rightarrow e^xf(x)\geq e^{x_0}f(x_0)$ ~~$\leq e^{x_0}$~~ $e^{-f(x)}\geq e^{-f(x_0)}\Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$.

$e^{x_0-x}f(x_0)\leq f(x)$. $\Rightarrow$ $e^{x_0-x}f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0)$.

令 $x\to x_0$ $\xRightarrow{\text{由夹逼}}$ $f(x)\to f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

同理 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 即在 x_0 处连续.

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t$. 法线斜率为 ~~$\cot$~~ $-\cot t$

法线: $y-a(\sin t-t\cos t)=-\cot t(x-a\cos t+t\sin t)$

$\Rightarrow$ ~~$\sin t$~~ $\sin t\,y+\cos t\,x-a=0$ ~~$d=\frac{|\sin t\cdot a(\sin t-t\cos t)+\cos t\,a(\cos t+t\sin t)-a|}{\sqrt{\sin^2t+\cos^2t}}$~~.

$d=\frac{|a|}{\sqrt{\sin^2t+\cos^2t}}=a\Rightarrow\checkmark$.

11. $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{3}{x_n})\geq\sqrt{3}\Rightarrow$ 有下界.

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{x_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{3}{3})=1\Rightarrow x_{n+1}\leq x_n$ 即 x_{n+1} 单调不增.

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+\frac{3}{x_n})\Rightarrow b=\frac{1}{2}(b+\frac{3}{b})\Rightarrow b=\frac{3}{b}\Rightarrow b=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

12. $y(0) = -y(0)\cdot 1 + 2e^{y(0)}\sin 0 - 7\cdot 0 \Rightarrow 2y(0)=0 \Rightarrow y(0)=0.$

$y' = -y'e^x - ye^x + 2e^y y'\sin x + 2e^y\cos x - 7.$

$y'(0) = -y'(0) - y(0) + 2e^{y(0)} - 7 \Rightarrow 2y'(0) = -7+2 \Rightarrow y'(0) = -\frac{5}{2}$

13. $f(x)$在$x=0$处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$在$x=0$处连续. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = A.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} x^2\sin\frac{\pi}{x} = 0 = A \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b = 0 = A.$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{\pi}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\frac{\pi}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} ax = 0$ $\forall a$均成立. $\Rightarrow f'(0)=0.$

故 $A=b=0$ a为任意实数时$f(x)$在$x=0$处可导.

14. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在 $= f'_+(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta x = 0\cdot f'_+(x_0) = 0.$

同理由左导数存在 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x)-f(x)) = 0 \Rightarrow f(x)$在$x_0$连续.

15. $d^3uv = d^3u\cdot v + 3d^2u\cdot dv + 3du\cdot d^2v + u\,d^3v$

$= \ln x\cdot e^x(dx)^3 + 3\frac{1}{x}\cdot e^x(dx)^3 + 3\cdot(-\frac{1}{x^2})\cdot e^x(dx)^3 + \frac{2}{x^3}e^x(dx)^3.$

$= e^x(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})(dx)^3$

$d^3(\frac{u}{v}) = d^3(\ln x\cdot e^{-x}) = \ln x\cdot(-e^{-x})(dx)^3 + 3\cdot\frac{1}{x}e^{-x}(dx)^3 + 3(-\frac{1}{x^2})(-e^{-x})(dx)^3 + \frac{2}{x^3}e^{-x}(dx)^3$

$= e^{-x}(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} - \ln x)(dx)^3.$