T_1 记原式为D_n. 按第一行展开

$$D_n = (a+b) D_{n-1} - ab D_{n-2}.$$

特征根 $\lambda_1 = a$ $\lambda_2 = b$,

$$\therefore D_n = A a^n + B b^n.$$

$$\because D_1 = a+b \quad D_2 = a^2 + ab + b^2.$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

(本题主要是利用递推来求行列式)

T_2. 等式两边同乘 C 得 $(2C-B)A^T = E$.

取转置 $A(2C^T - B^T) = E$

$$\therefore A = (2C^T - B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(本题主要考查矩阵运算

T3、∵ $\operatorname{rank} A = n-1 \Rightarrow |A| = 0$

而 $|A| = [(n-1)a+1]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a \cdots & a \\ a & a & 1 \cdots & a \\ \vdots & & & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,

$= [(n-1)a+1](1-a)^{n-1}$

∴ $a = \frac{1}{1-n}$ or $a=1$

当 $a=1$　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$　$\operatorname{rank} A = 1$.

∴ $a = \frac{1}{1-n}$. 说明左上角的 $(n-1)\times(n-1)$矩阵

$A' = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$　$|A'| \neq 0$

∴ $a = \frac{1}{1-n}$

(本题主要考查秩的定义和应用).

T4. ∵ 由题意 $(A^2-E)B = A+E$.

∵ $A^2-E = (A+E)(A-E)$.

$A+E$ 可逆 $\Rightarrow (A-E)B=E$.

∴ $|A-E|\,|B| = 1$

∵ $|A-E| = 2 \Rightarrow |B| = 1$

(本题主要考查行列式乘积和矩阵运算)

T5. ∵ 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$

$|A| = \prod\limits_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i) \neq 0$. ∴ 有唯一解.

∵ 由克莱默法则

$x_m = \dfrac{|A_m|}{|A|}$ $\quad A_m = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & m & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & b & & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & & b^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$

$= \prod\limits_{1\le i<j\le n} (C_j - C_i)$ 其中 $C_i = \begin{cases} b & i=m \\ a_i & i\neq m \end{cases}$

(本题主要考查线性方程组解唯一性和克莱默法则)

T6 (1) ∵ $(I_n-2A)(I_n-2A) = I_n - 4AI_n + 4A^2$

$= I_n$.

∴ I_n-2A 可逆

(2) ∵ $A^3-2A^2+2A-I_n = -I_n$

$\Rightarrow (A-I_n)(A^2-A+I_n) = -I_n$.

∴ $(I_n-A)^{-1} = A^2-A+I_n$.

(本题主要利用矩阵的多项式等式来找逆矩阵

T7. (1). 必要性显然

充分性. 设 $A=(a_{ij})$. 令 $\alpha=e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\cdots i$

∵ $e_i^T A e_i = a_{ii} \Rightarrow a_{ii}=0$

令 $\alpha=e_i+e_j$

$0 = (e_i+e_j)^T A (e_i+e_j) = a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}$

$= a_{ij}+a_{ji}=0$

∵ $a_{ji}=a_{ij} \Rightarrow a_{ij}=a_{ji}=0$

∴ $A=O$

(2) "⇒" ∵ A 反对称

∴ 对 ∀ n维列向量 α. $(\alpha^TA\alpha)^T = -\alpha^TA\alpha$.

∵ $\alpha^TA\alpha$ 是一个数 ∴ $(\alpha^TA\alpha)^T = \alpha^TA\alpha$.

∴ $\alpha^TA\alpha = 0$.

"⇐" ∵ $\alpha^TA\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^TA^T\alpha = 0$.

∴ $\alpha^T(A+A^T)\alpha = 0$ 对 $\forall \alpha$ 成立

∴ $A+A^T=0 \Rightarrow$ A为反对称.

(本题考查对称阵和反对称阵的性质).

T8. ① 先考虑 A中同一行的两个元素. 不妨取 a_{11} 和 a_{12}.

其余同理.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

∵ $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 0$.

$$\therefore A_{12} = \begin{vmatrix} -a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1-c_3 \\ \vdots \\ c_1-c_{n-1}}]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}$$

∴ $A_{12} = A_{11}$　∴ ① 已证.

② 再考虑 A中同一列元素 a_{ik} a_{jk}

取A的转置 A^T　$a_{ik} \to a_{ki}$　$a_{jk} \to a_{kj}$

由①知 $A'_{ki} = A'_{kj}$. 转置回去后 $A_{ik} = A_{jk}$.

∴ ② 已证.

③. A中任意两个元素 a_{ij} 和 a_{km}.

$A_{ij} = A_{im} = A_{km}$.

∴ A中每个元素代数余子式均相等

(本题考查代数余子式和行列式变换)